introducción a las Matemáticas

Bruce E. Meserve
Max A. Sobel

REVERTÉ EDICIONES

INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS

Bruce E. Meserve
Profesor de Matemáticas
En la Universidad de Vermont

Max A. Sobel
Profesor de Matemáticas
Del Colegio Estatal de Montclair



REVERTE EDICIONES, S.A. DE C.V.

Versión al español de la segunda edición de

INTRODUCTION TOMATHEMATICS,

BRUCE E. MESERVE

MAX A. SOBEL

Editada por

PRENTICE-HALL, Inc.,

Englewood Cliffs, New Yersey

Traducida por

JULIAN ZUGAZAZAGOITIA
Profesor de Matemáticas
en el Int. Politécnico Nac. en México

2da. Edición

Río Pánuco # 141
Col. Cuauhtémoc
06500-México, D.F.
Tel. 5533-56-58 al 60
e-mail: reverte@reverte.com.mx

Impreso en México Printed in México

Reimpresión 2008

PREFACIO

Las matemáticas pueden ser divertidas. Haciendo suya esta idea, los autores la han desarrollado, introduciendo una variedad de temas interesantes a la vez que oportunos, sin destacar de modo especial las llamadas aplicaciones prácticas. Este enfoque, se espera, dará al lector una imagen más clara del verdadero significado y de la belleza de las matemáticas, que la que le daría la tradicional forma de abordarlas con toda una manipulación abstracta.

El lector no necesita una gran preparación matemática. Se supone que habrá cursado en sus estudios secundarios los elementos del álgebra y de la geometría, pero no se presupone que domine en sus detalles dichas materias. Se espera, sin embargo, de antemano, madurez e interés en la materia.

Los temas considerados en el libro se aplican continuamente

en muchas actividades de la época tecnológica que hoy vive el hombre. Por ello, este libro se ha escrito pensando en una variedad de posibles lectores. Su contenido es adecuado para estudiantes de bachillerato que, teniendo una preparación matemática mediana y no habiendo destacado, en dicha materia, durante sus estudios secundarios, desean conocer, sin embargo, los fundamentos de la estructura matemática. Se abarca así a un gran número de estudiantes en busca del conocimiento de las matemáticas básicas. Entre dichos estudiantes se encontrarán, probablemente, futuros maestros de escuelas primarias. El libro también es apropiado para cursos de preparación de maestros de primera enseñanza. Con dicha finalidad, a lo largo de la obra, se hace énfasis sobre los conceptos claves y sobre la estructura de las matemáticas, exponiéndose en forma somera todo lo relativo a procedimientos mecánicos.

El famoso matemático francés René Descartes concluyó su famosa obra *La géometrie* expresando: "Espero que la posteridad me juzgue con generosidad no sólo por las cosas que he expuesto, sino también por aquellas que he omitido intencionalmente con el fin de dejar a otros el placer del descubrimiento". Los autores han intentado exponer en este texto una gran cantidad de materias. Sin embargo, han omitido muchos puntos para que el lector experimente a través del descubrimiento la verdadera belleza de las matemáticas.

Por último, los autores desean expresar su reconocimiento a los editores de Prentice-Hall, Inc., por todo el esfuerzo puesto a favor de la publicación del libro. En particular, los autores desean manifestar su agradecimiento al señor James Walsh por su constante aliento y a la señorita Dorothy Crouch por su paciencia y cuidado en la preparación del manuscrito.

Bruce E. Meserve
Max A. Sobel

CONTENIDO

GLOSARIO DE SIMBOLOS

$=$	igual
$\neq$	desigual
$>$	mayor que
$\ngtr$	no mayor que
$<$	menor que
$\nless$	no menor que
$\geq$	mayor o igual
$\leq$	menor o igual
$\in$	es un elemento de
$\notin$	no es elemento de
$\varnothing$, $\{\quad\}$	el conjunto vacío
$\{1, 2\}$	el conjunto uno, dos
$\{x \mid \ldots\}$	el conjunto de las **x** tales que...
$\subset$	subconjunto
$\subseteq$	subconjunto propio
$\cap$	intersección
$\cup$	unión
$\overleftrightarrow{AB}$	la recta **AB**
$\overset{\circ\!\!\rightarrow}{AB}$	la semi recta **AB**
$\overline{AB}$	el segmento de recta **AB**
$\overrightarrow{AB}$	el rayo **AB**
$\overset{\circ\!\!-\!\!\circ}{AB}$	el segmento de recta abierto **AB**

$\parallel$	paralelas
$\perp$	perpendiculares
$\cong$	congruente
$\sim$	semejante
$\angle ABC$	ángulo **ABC**
$f(x)$	función de **x**
$\lvert x \rvert$	valor absoluto de **x**
$\wedge$	y (conjunción)
$\vee$	o (disyuntiva)
$\sim p$	no **p** (negación)
$p \rightarrow q$	si **p**, entonces **q** (condicional)
$p \leftrightarrow q$	**p** si y sólo si **q** (bicondicional)
$P(A)$	la probabilidad de **A**
$n!$	$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times$ **n**
${}_nP_r$	el número de permutaciones de **n** objetos tomados de **r** en **r**
${}_nC_r$, $\binom{n}{r}$	el número de combinaciones de **n** objetos tomados de **r** en **r**
$\forall_x$	para toda **x**
$\exists_x$	existe una **x** tal que

Capítulo 1

DIVERSION CON MATEMATICAS

Las matemáticas tienen un sinnúmero de aplicaciones prácticas que van desde su uso cotidiano hasta el cálculo del derrotero de los astronautas a través del espacio. Muchos las estudian sólo en función de las aplicaciones que aportan al campo particular que les es propio. Las matemáticas pueden considerarse también como parte de nuestra gran herencia cultural, dado que su historia se remonta a muchos miles de años. Como tal, el ciudadano medio del siglo veinte que quiera completar su acervo cultural, debería de estudiarlas.

Por otra parte, el interés de muchos por las matemáticas se debe en forma exclusiva a la belleza clara, pura y concisa de su estructura. Nuestro deseo, en este libro, es exponer parte de esa belleza sin hacer excesivo énfasis sobre sus valores pragmáticos. Pretende-

mos hacer ver que las matemáticas pueden estudiarse por el solo interés que despierten, es decir, por mera diversión. Con tal propósito, el capítulo presente contiene, a título de "entremeses surtidos", una variedad de temas con los que se pretende despertar el apetito al lector para el "Plato principal" que sigue. Los temas que se abordan no tienen ninguna relación entre sí y no son necesarios para la comprensión de capítulos posteriores. No obstante, algunos de los puntos que aquí se tratan serán analizados con mayor detalle a lo largo de la obra.

1-1 MODELOS MATEMATICOS

A los matemáticos les gusta investigar en busca de modelos y generalizaciones en todas las ramas de su materia —en aritmética, en álgebra y en geometría. Tal búsqueda de modelos, no sólo puede resultar interesante, sino que puede también ayudar a comprender el desarrollo de las matemáticas como un todo.

MULTIPLOS DE NUEVE

En la estructura de la aritmética se pueden encontrar muchos modelos que con frecuencia nos pasan desapercibidos. Por ejemplo, consideremos los múltiplos de 9:

$$\begin{aligned}
1 \times 9 &= 9\\
2 \times 9 &= 18\\
3 \times 9 &= 27\\
4 \times 9 &= 36\\
5 \times 9 &= 45\\
6 \times 9 &= 54\\
7 \times 9 &= 63\\
8 \times 9 &= 72\\
9 \times 9 &= 81
\end{aligned}$$

¿Qué modelos se observan en la columna de múltiplos de la derecha? Se puede observar que la suma de los dígitos en cada caso es siempre 9. También se puede ver que el dígito de las unidades decrece (9, 8, 7, . . .), en tanto que el dígito de las decenas aumenta (1, 2, 3, . . .). ¿Qué se esconde detrás de este modelo?

Consideremos el producto

$$5 \times 9 = 45.$$

Para determinar 6×9 necesitamos sumar 9 a 45. Ahora bien, en lugar de sumar 9, podemos sumar 10 y restar 1.

$$\begin{array}{r} 45 \\ +10 \\ \hline 55 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 55 \\ -1 \\ \hline 54 \end{array} = 6 \times 9$$

Es decir, sumando 1 al dígito de las decenas, 4, de 45, de hecho hemos sumado 10 a 45. Restando 1 al dígito de las unidades, 5, de 45, obtenemos 54 para el producto que deseábamos.

MULTIPLICACION DIGITAL

El número 9, incidentalmente, tiene otras propiedades curiosas. Una de especial interés consiste en un procedimiento para multiplicar por 9 mediante los dedos de las manos. Por ejemplo, para multiplicar 9 por 3, pónganse ambas manos juntas, como se ve en la figura, y dóblese el tercer dedo a partir de la izquierda. El resultado se lee como 27.

La siguiente figura muestra el procedimiento para determinar el producto de 7×9. Obsérvese que el séptimo dedo a partir de la izquierda está doblado; el resultado se lee tomando como dígito de las decenas el número de dedos que quedan a la izquierda del dedo doblado y como dígito de las unidades el de los que quedan a su derecha.

¿Qué producto se está indicando en la figura siguiente?







MODELOS NUMERICOS

He aquí otro modelo relacionado con el número 9. Se puede

verificar, si se desea, que cada una de las siguientes igualdades es correcta:

$$
\begin{aligned}
1 \times 9 + 2 &= 11 \\
12 \times 9 + 3 &= 111 \\
123 \times 9 + 4 &= 1\,111 \\
1\,234 \times 9 + 5 &= 11\,111 \\
12\,345 \times 9 + 6 &= 111\,111
\end{aligned}
$$

Trate de determinar una correspondencia entre el número de unos que componen al número de la derecha y uno de los números que se utilizan a la izquierda. Ahora, sin efectuar el cálculo, trate de dar el resultado de las siguientes operaciones:

$$
\begin{aligned}
123\,456 \times 9 + 7 &= \,? \\
1\,234\,567 \times 9 + 8 &= \,?
\end{aligned}
$$

Veamos ahora *por qué* funciona este modelo. Para ello examinaremos una de las igualdades. Una explicación análoga sirve para cada una de las demás. Consideremos la igualdad:

$$12\,345 \times 9 + 6 = 111\,111$$

Podemos expresar el número 12 345 como una suma de cinco números de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{r}
11\,111 \\
1\,111 \\
111 \\
11 \\
1 \\
\hline
12\,345
\end{array}
$$

Ahora multipliquemos por 9 cada uno de los cinco números:

$$
\begin{aligned}
11\,111 \times 9 &= 99\,999 \\
1\,111 \times 9 &= 9\,999 \\
111 \times 9 &= 999 \\
11 \times 9 &= 99 \\
1 \times 9 &= 9
\end{aligned}
$$

Por último, sumemos 6, pero sumando seis unos como a continuación se indica y determinemos la suma total:

$$
\begin{array}{rcr}
99\,999 + 1 & = & 100\,000 \\
9\,999 + 1 & = & 10\,000 \\
999 + 1 & = & 1\,000 \\
99 + 1 & = & 100 \\
9 + 1 & = & 10 \\
1 & = & 1 \\
\hline
 & & 111\,111
\end{array}
$$

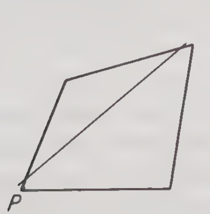
He aquí otro modelo interesante. Después de estudiarlo, trate de incluir las tres igualdades que seguirían en la tabla:

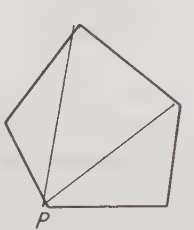
$$
\begin{array}{rcl}
1 \times 1 & = & 1 \\
11 \times 11 & = & 121 \\
111 \times 111 & = & 12\,321 \\
1\,111 \times 1\,111 & = & 1\,234\,321 \\
11\,111 \times 11\,111 & = & 123\,454\,321
\end{array}
$$

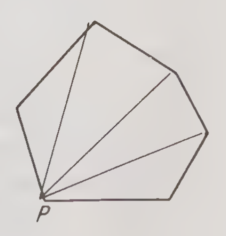
¿Considera que el modelo expuesto continúa indefinidamente? A fin de ayudarle a contestar a la pregunta, calcule el producto de $1\,111\,111\,111 \times 1\,111\,111\,111$.

MODELOS GEOMETRICOS

En el estudio de geometría es frecuente llegar a conclusiones a partir de un pequeño número de ejemplos junto con la exposición de un modelo. Consideremos, por ejemplo, el problema de determinar el número de triángulos que se pueden formar en un polígono dado, trazando diagonales a partir de uno de sus vértices. En principio trazamos varias figuras y consideramos los resultados en una tabla tal como sigue.





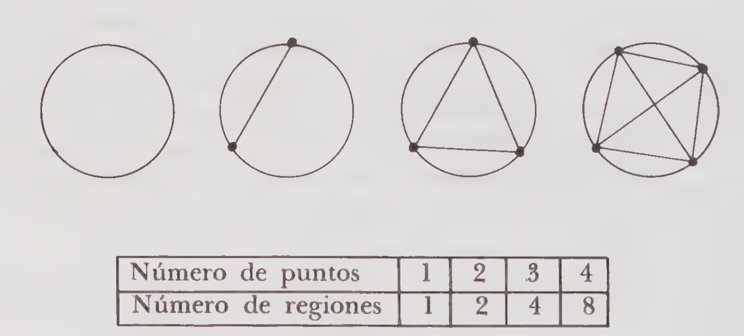


Número de lados del polígono	4	5	6
Número de diagonales a partir de cada vértice	1	2	3
Número de triángulos formados	2	3	4

Del modelo que se expone en la tabla se infiere que el número de triángulos formados es igual al número de lados del polígono menos dos. Así, a partir de uno de los vértices de un dodecágono, polígono de 12 lados, podemos suponer que se formarán 10 triángulos. En general, con un polígono de n lados podrán formarse $n - 2$ triángulos.

Esto es lo que se conoce como un razonamiento por *inducción*. Se ha generalizado a partir de varios ejemplos específicos y de un modelo obvio. Este procedimiento no constituye, sin embargo, una demostración. Para *demostrar* que se pueden formar, de esta forma, $n - 2$ triángulos a partir de un polígono de n lados, debemos observar que dos de los n lados del polígono se cortan en el punto común de las diagonales y que cada uno de los $n - 2$ lados restantes se utiliza para formar un triángulo diferente.

Es importante señalar que no todos los modelos conducen a generalizaciones válidas. Los modelos ofrecen la oportunidad de hacer suposiciones razonables, pero es necesario demostrarlas antes de que puedan aceptarse con toda certeza. Consideremos, por ejemplo, el número máximo de regiones en que se puede dividir una región circular mediante segmentos de rectas determinadas por puntos dados en todas las formas posibles sobre una circunferencia.



Número de puntos	1	2	3	4
Número de regiones	1	2	4	8

¿Considera como una suposición razonable que el número de regiones que se obtienen a partir de cinco puntos es 16? Haga una figura para confirmar su supuesto. ¿Qué número máximo de regiones supone que se pueden obtener a partir de seis puntos? Nue-

vamente trace una figura a fin de confirmar su supuesto. ¡Es posible que se sorprenda!

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 1-1

1. Verifique que el procedimiento para multiplicar con los dedos, expuesto en esta sección, es válido para todos los múltiplos de nueve desde 1×9 hasta 9×9.

2. Siguiendo el procedimiento expuesto en esta sección, demuestre que $1\,234 \times 9 + 5 = 11\,111$.

3. Estudie el siguiente modelo y aplíquelo para expresar los cuadrados de 6, 7, 8 y 9 del mismo modo.

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1 + 2 + 1$$
$$3^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$$
$$4^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$$
$$5^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

4. Estudie el siguiente modelo y complete los cuatro últimos renglones.

$$1 + 3 = 4 \text{ o } 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 \text{ o } 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 \text{ o } 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = ?$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = ?$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = ?$$
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = ?$$

5. Una suma puede comprobarse por el método conocido como "prueba del nueve". Para ello, primero se determina la suma de los dígitos de cada uno de los sumandos (es decir, los números que se han sumado) y se divide entre 9, anotándose el resto. Los dígitos pueden sumarse una y otra vez hasta que se obtiene un resto de un solo dígito. La suma de dichos restos se divide a su vez entre 9. y se determina un último resto. Dicho resto deberá ser igual, si la suma es correcta, al resto que se obtenga al dividir entre 9 la suma de los dígitos del resultado de la suma que se está comprobando. He aquí un ejemplo:

Sumando	*Suma de los dígitos*	*Restos*
4 378	22	4
2 160	9	0
3 872	20	2
1 085	14	5
11,495		11

Cuando la suma de los restos se divide entre 9, el último resto es 2. Dicho resto es igual al que se obtiene al dividir entre 9 la suma de los dígitos del resultado $(1 + 1 + 4 + 9 + 5 = 20)$.

Aplique este método en diversos ejemplos y verifique que es válido en cada caso.

6. Trate de descubrir un procedimiento para comprobar la multiplicación mediante la prueba del nueve. Verifique que dicho procedimiento es válido para diversos casos.

7. He aquí un procedimiento para multiplicar por 9 un número de dos dígitos mediante los dedos de las manos, con tal de que el dígito de las decenas sea menor que el dígito de las unidades. El diagrama que sigue muestra cómo se multiplica 28 por 9.



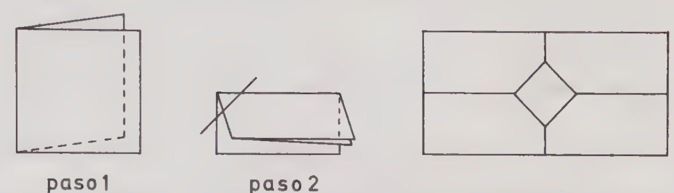
A partir de la izquierda déjese un espacio después del segundo dedo y dóblese el octavo. Léase el producto 252 considerando grupos de dedos.

Aplique este procedimiento para determinar: **(a)** 9×47; **(b)** 9×36; **(c)** 9×18; **(d)** 9×27.

Compruebe cada uno de los resultados que se obtengan.

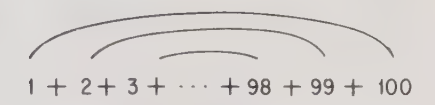
8. Tómese una hoja de papel y dóblese a la mitad. Dóblese de nuevo a la mitad y córtese la esquina en la que han concurrido los dobleces.

Al desdoblar la hoja tendrá un aspecto como el que se muestra en la tercera figura.



Es decir, con dos dobleces y el corte hemos obtenido un agujero. Repita el mismo proceso, pero esta vez haciendo tres dobleces antes de cortar la esquina. Trate de predecir el número de agujeros que se obtendrán. ¿Cuántos agujeros se obtendrán con cuatro dobleces? ¿Con n dobleces?

9. Gauss, famoso matemático alemán, siendo joven, encontró la suma de los primeros 100 números consecutivos por el siguiente procedimiento:



Dedujo que había 50 parejas de números, cada una de las cuales sumaría 101 (100 + 1, 99 + 2, 98 + 3, etc.). Por consiguiente la suma total sería 50×101 es decir, 5050. Aplíquese este procedimiento para determinar:

(a) La suma de los primeros 80 números consecutivos.
(b) La suma de los primeros 200 números consecutivos.
(c) La suma de todos los números impares desde 1 hasta 49.
(d) La suma de todos los números impares desde 1 hasta 199.
(e) La suma de todos los números pares desde 2 hasta 400.

10. Utilizando los resultados obtenidos en el Ejercicio 9, trate de determinar una fórmula para la suma de:

(a) los n primeros números consecutivos [es decir, $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n$].
(b) los n primeros números impares [es decir, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1)$].

11. Determinar la suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

A fin de ayudarle a encontrar dicha suma, complete las siguientes sumas parciales y trate de descubrir un modelo.

(a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ?$

(b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = ?$

(c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = ?$

12. Trate de descubrir la regla que se está utilizando en cada uno de los siguientes casos para obtener el resultado dado. Por ejemplo, dada la siguiente información.

$2, 5 \rightarrow 6;$ $3, 10 \rightarrow 12;$ $7, 8 \rightarrow 14;$ $5, 3 \rightarrow 7$

se determina la regla $x, y \rightarrow x + y - 1$.

(a) $3, 4 \rightarrow 8;$ $3, 3 \rightarrow 7;$ $1, 5 \rightarrow 7;$ $2, 8 \rightarrow 11.$
(b) $2, 4 \rightarrow 8;$ $3, 5 \rightarrow 15;$ $1, 7 \rightarrow 7;$ $3, 9 \rightarrow 27.$
(c) $1, 5 \rightarrow 1;$ $5, 2 \rightarrow 2;$ $3, 9 \rightarrow 3;$ $6, 5 \rightarrow 5.$
(d) $4, 8 \rightarrow 4;$ $5, 1 \rightarrow 5;$ $6, 6 \rightarrow 6;$ $8, 2 \rightarrow 8.$
(e) $3, 4 \rightarrow 5;$ $4, 4 \rightarrow 4;$ $5, 7 \rightarrow 0;$ $9, 2 \rightarrow 1.$

1-2 MATEMATICAS RECREATIVAS

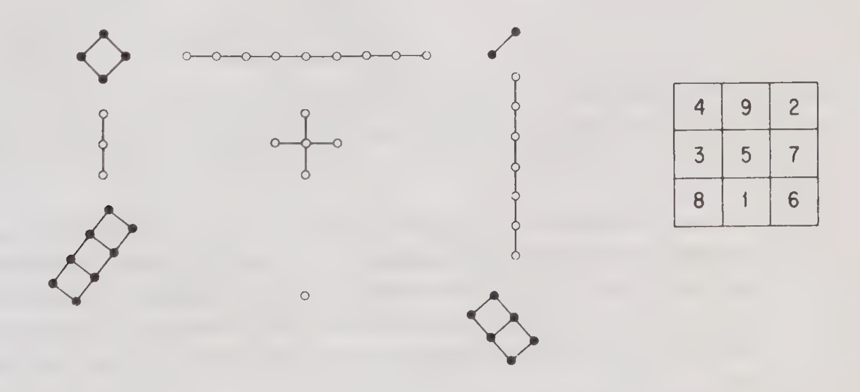
La popularidad de las matemáticas como medio recreativo y de diversión se hace evidente por la frecuencia con que se las encuentra en revistas populares y periódicos. En esta sección exploraremos dicho aspecto recreativo de las matemáticas.

CUADRADOS MAGICOS

¿Quién no se ha desconcertado alguna vez ante un cuadrado mágico? El cuadrado mágico que aquí se muestra es una disposición tal que la suma de los números en cualquier renglón, columna o diagonal, es siempre igual a 34.

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

Si bien existen métodos formales para construir tales disposiciones, aquí no nos ocuparemos de ellos. Baste decir que tales ordenamientos han fascinado al hombre durante muchos siglos. Según se cuenta, el primer cuadrado mágico del que se tiene noticia, lo encontró el emperador Yu, 2200 antes de J.C., grabado sobre la concha de una tortuga. Se le dio el nombre de "lo-shu" Aparecía como un arreglo de símbolos numéricos representados por una sarta de nudos, tal como se muestra en la figura izquierda al pie de la página. Los nudos negros representaban números pares, en tanto que los blancos representaban números impares. Hoy en día se representaría por medio de un cuadrado mágico de tercer orden. La suma a lo largo de cualquier renglón, columna o diagonal es 15, como se ve en la figura de la derecha.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

TRUCOS MATEMATICOS

Los ordenamientos cuadrados de números, muy frecuentes en "matemáticas", están íntimamete ligados a los cuadros mágicos. "Construyamos" juntos uno de estos trucos. Comencemos por un cuadrado de 4 $\times$ 4 y coloquemos en su contorno seis números cualesquiera, tal como se muestra en la figura. Los números 3, 4, 1, 7,

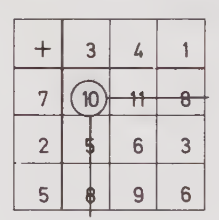
2 y 5 se han elegido arbitrariamente. Ahora determinemos la suma de cada pareja de números tal como se hace en una tabla de sumas.

+	3	4	1
7			
2			
5			

Con esto estamos listos para ejecutar el truco. Consideremos uno cualquiera de los nueve resultados obtenidos, pongamos el 10, y tachemos los que se encuentran en el mismo renglón y en la misma columna que el 10.

Consideremos nuevamente uno de los números restantes, pongamos el 3, y repitamos el proceso. Queda un solo número, el 9. La suma de los dos números considerados y el que queda es igual a 22. En efecto, $10 + 3 + 9 = 22$.

+	3	4	1
7	10	11	8
2	5	6	3
5	8	9	6



+	3	4	1
7	10	11	8
2	5	6	3
5	8	9	6

Lo interesante del asunto aquí es que, se empiece por donde se empiece el proceso expuesto, la suma de los tres números siempre será igual a 22. Obsérvese que 22 es la suma de los seis números que se eligieron arbitrariamente al principio. Trate de dar una explicación del funcionamiento de este truco; construya una tabla de 4×4.

Otro tipo de truco matemático muy popular es el de "piense en un número". Siga las siguientes instrucciones:

Piense en un número.
Súmele 3.
Multiplique el resultado por 2.
Al resultado réstele 4.
Divídalo entre 2.
Reste el número que pensó.

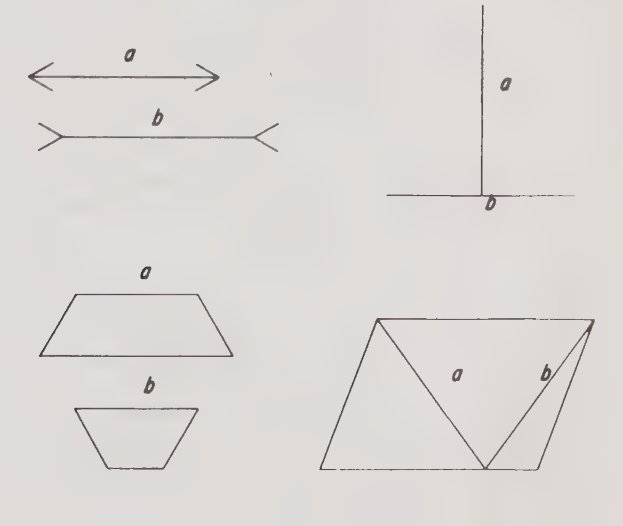
Sea cual sea el número en que se piense, al seguir correctamente las instrucciones, el resultado final siempre es igual a 1. Este truco puede explicarse por medio del simbolismo algebraico o mediante figuras, como a continuación se expone.

Trate por sí mismo de plantear un truco semejante.

Piense un número	n	(número de monedas en una caja)
Súmele 3	$n+3$	(número original de monedas más tres)
Multiplíquelo por 2	$2n+6$	(dos cajas de monedas más seis)
Réstele 4	$2n+2$	(dos cajas de monedas más dos)
Divida entre 2	$n+1$	(una caja de monedas más una)
Réstele el número original	$(n+1)-n=1$	(queda una moneda)

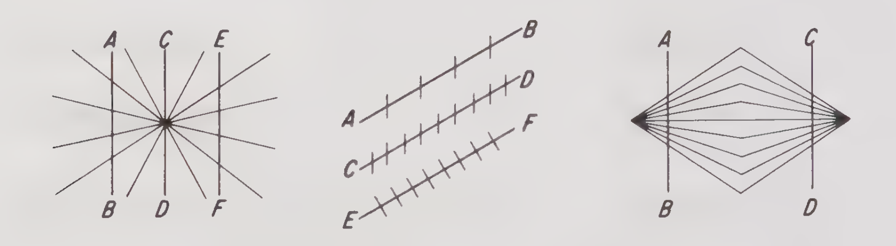
ILUSIONES OPTICAS

Las ilusiones ópticas constituyen una clara advertencia sobre el hecho de que no siempre podemos tener una fe ciega en nuestros ojos. ¿La tiene usted en los suyos? Examínese usted mismo y vea.



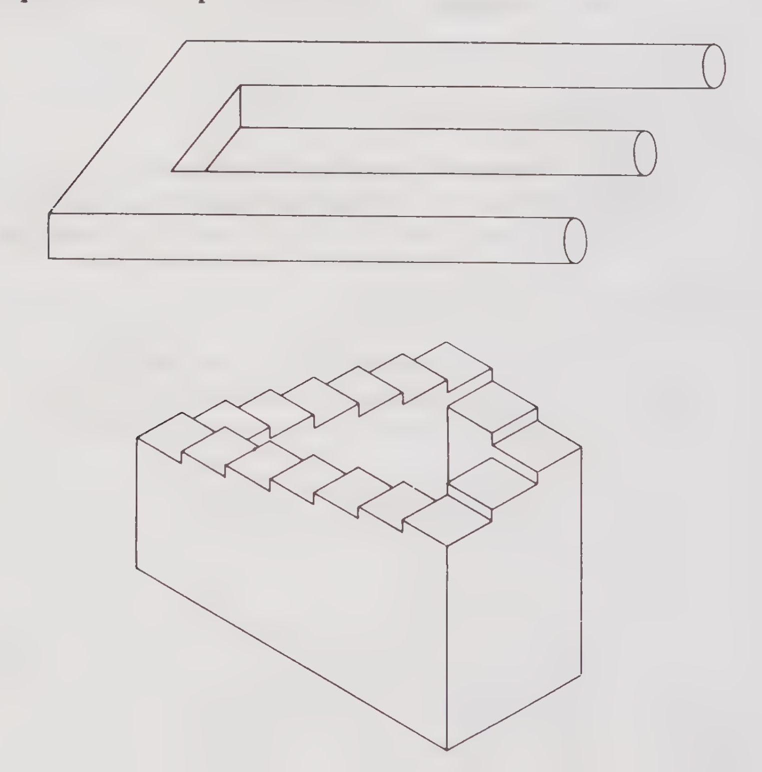
Primero trate de ver, en las cuatro partes de las figuras que aparecen al pie de la página 12, cuál de los segmentos, *a* o *b*, parece ser más largo. Después, mediante una regla, compruebe su apreciación.

Ahora trate de ver, en las tres partes de la siguiente figura, cuáles de las líneas son paralelas, si es que algunas lo son.



En ambos casos se habrá llegado a la conclusión de que la vista resulta engañosa. En cada una de las partes de la primera figura los segmentos son iguales en longitud; en cada una de las tres últimas las rectas son paralelas.

He aquí otras dos ilusiones ópticas de reciente creación que son un tanto sorprendentes a primera vista.



FALACIAS

Las falacias matemáticas han desorientado siempre tanto al aficionado a las matemáticas como al profesional.

He aquí una falacia aritmética para desorientarlo. Puede incluso tratar de desorientar a su propio banquero. Primero necesita depositar $50.00 en su banco y después hacer retiros de la siguiente forma:

	Retirar $20.00, dejando un saldo de	$30.00
	Retirar $15.00, dejando un saldo de	$15.00
	Retirar $ 9.00, dejando un saldo de	$ 6.00
	Retirar $ 6.00, dejando un saldo de	$ 0.00
Sumando se tiene	$50.00	$51.00

El total de los retiros es de $50.00 en tanto que el total del saldo es de $51.00. ¿Puede usted ir al banco a reclamar un peso?

He aquí una "demostración" de que 1 = 2. Pese a que haya podido olvidar el álgebra necesaria para seguir el proceso, no se detenga por ello; trate de descubrir la falacia.

Sea $a = b$. Entonces

$$a^2 = b^2 = b \cdot b.$$

Dado que $a = b$, podemos escribir $b \cdot b$ como $a \cdot b$. Por lo tanto

$$a^2 = a \cdot b.$$

Restando b^2:

$$a^2 - b^2 = a \cdot b - b^2.$$

Factorizando:

$$(a + b)(a - b) = b(a - b)$$

Dividiendo entre $a - b$:

$$\frac{(a + b)(a - b)}{(a - b)} = \frac{b(a - b)}{(a - b)}$$

Por consiguiente:

$$a + b = b.$$

Dado que $a = b$, podemos escribir lo anterior como

$$b + b = b \qquad \text{o} \qquad 2b = b.$$

Dividiendo entre b:

$$\frac{2b}{b} = \frac{b}{b}$$

Por consiguiente:

$$2 = 1.$$

Mucha gente se divierte resolviendo acertijos. En los siguientes ejercicios se ofrece una variedad en la que se encontrarán acertijos de antiguos conocidos.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 1-2

1. Todos los siguientes acertijos tienen respuestas lógicas, pero no son estrictamente matemáticas. Vea cuántos puede resolver.

   (a) ¿Cuántos postes telefónicos se necesitan para alcanzar la luna?
   (b) ¿Hasta dónde puede entrar un perro en un bosque?
   (c) Dos monedas tienen un valor total de 55 centavos y una de ellas no es de 5 centavos. ¿Puede usted explicar esto?
   (d) ¿Cuánto lodo hay en un hoyo de 3 m. de ancho, 4 m. de largo y 2 m. de hondo?
   (e) Un ciego tenía un hermano, pero dicho hermano no tenía hermanos. ¿Cuál era el parentesco entre los dos?

2. Un granjero con un zorro, una gallina y un saco de maíz, necesita cruzar un río en un bote en el que sólo caben él y una de las tres cosas. Ahora bien, si deja solos al zorro y a la gallina, el zorro se comerá a la gallina; y si deja a la gallina y el saco de maíz, la gallina se comerá el maíz. ¿Cómo puede el granjero cruzar el río con las tres cosas?

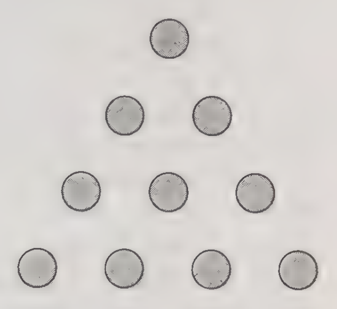
3. Tres caníbales y tres misioneros necesitan cruzar un río en un bote en el que sólo caben dos personas. En tanto que los caníbales estén solos o que el número de misioneros junto a ellos sea superior o igual, la situación no ofrece peligro. Por el contrario, se torna peligrosa si los caníbales superan en número a los misioneros. ¿Cómo pueden cruzar el río sin que los misioneros corran peligro?

4. Una botella y su corcho cuestan $1.50. La botella cuesta $1.00 más que el corcho. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

5. Un gato está en el sótano de un edificio de 30 pisos. Por el día sube tres pisos y por la noche baja dos. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a la azotea del edificio?

6. Si un gato y medio se comen un pescado y medio en día y medio, ¿cuántos días tardarán 100 gatos en comerse 100 pescados?

7. Diez monedas están ordenadas, formando un triángulo tal como se muestra en la figura. Moviendo sólo tres de las monedas, fórmese un nuevo triángulo tal que sus vértices aparezcan en direcciones opuestas a las de la figura.

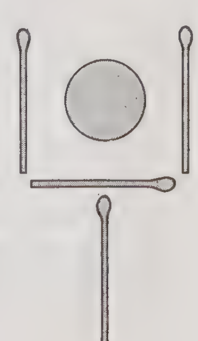


8. Ordenar los ocho segmentos que se muestran a fin de formar tres cuadrados congruentes, es decir, tres cuadrados que son exactamente del mismo tamaño. Cada uno de los segmentos pequeños es la mitad de los segmentos mayores.



9. Utilizando seis palillos, del mismo tamaño, fórmense cuatro triángulos equiláteros. (Un triángulo equilátero tiene sus tres lados iguales).

10. Cuatro cerillas están ordenadas formando una "copa" con una moneda dentro de ella, tal como se muestra en la figura. Moviendo sólo dos de las cerillas fórmese la misma "copa" de tal forma que la moneda aparezca fuera de ella.

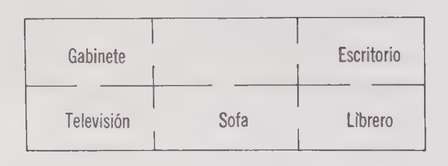


11. Un marino desembarca en una isla habitada por dos tipos de personas. Los "A" siempre mienten y los "B" siempre dicen la verdad. Se encuentra en la playa a tres habitantes y le pregunta al primero: "¿Eres un *A* o un *B*? El hombre contesta, pero el marino no oye la respuesta y entonces le pregunta al segundo lo que ha dicho el primero. El segundo replica: "Ha dicho que era un *B*. Lo es al igual que yo". Entonces el tercero dice: "No es verdad. El primero es un *A* y yo soy un *B*". ¿Puede usted determinar quién está mintiendo y quién está diciendo la verdad?

12. Un hombre va a un pozo con tres recipientes cuyas capacidades son de 3, 5 y 8 litros, respectivamente. ¿Cómo puede sacar exactamente 4 litros de agua?

13. He aquí un truco matemático para planteárselo a un amigo. Dígale que tome una moneda de cinco centavos en una mano y una de diez centavos en la otra (sin que usted sepa en qué mano está cada moneda). Dígale ahora que multiplique por 6 el valor de la moneda de la mano derecha y por 3 el de la mano izquierda, que sume y le diga el resultado. Si el resultado es par, entonces la moneda de cinco centavos está en la mano derecha, si el resultado es impar, la moneda de cinco centavos está en la mano izquierda. ¿Puede deducir el funcionamiento de este truco?

14. Considere una casa con cinco cuartos amueblados tal como se muestra en la figura. Se trata de intercambiar el escritorio y el librero pero de tal forma que no haya más de un mueble a la vez en cada cuarto. Los otros tres muebles no tienen que volver necesariamente a sus lugares de origen. ¿Puede hacerlo? Trátelo utilizando monedas para representar los muebles.



15. Tres personas alquilan un cuarto por $30.00, pero el gerente decide cobrarles sólo $25.00 y les envía los $5.00 por el conducto de un mozo. Este aprovecha la ocasión, se guarda $2.00 y les devuelve $3.00. Ahora bien, el cuarto originalmente rentaba $30.00, pero se les han devuelto $3.00. Así pues, han pagado $27.00

por el cuarto. $27.00 del cuarto y los $2.00 que se quedó el mozo suman $29.00. ¿Dónde ha quedado el peso que falta?

16. Escriba los números del 1 al 10 utilizando cuatro cuatros en cada caso. He aquí los tres primeros casos:

$$\frac{44}{44} = 1; \qquad \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2; \qquad \frac{4 + 4 + 4}{4} = 3.$$

17. Coloque cuatro monedas, dos de 5c y dos de 10c, como se muestra en la figura. Trate de intercambiar las monedas de tal forma que las monedas de 5c queden a la derecha y las de 10c a la izquierda. Sólo se puede mover una moneda cada vez y se puede saltar sobre una sola moneda; las monedas de 5c sólo se pueden mover hacia la derecha y las de 10c hacia la izquierda; dos monedas no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo. ¿Cuál es el número mínimo de movimientos requeridos para completar el cambio?



18. Repita el Ejercicio 17 con tres monedas de cada valor y siete casillas. ¿Cuál es en este caso el número mínimo de movimientos requeridos para hacer el cambio?

1-3 MAS ALLA DEL GOOGOL

Hoy en día todos estamos familiarizados con números muy grandes, ya sea por el simple hecho de enterarnos del presupuesto de la nación o de la deuda pública. El número "un millón" no nos parece excepcionalmente grande. ¿Pero nos hemos detenido alguna vez a considerar lo grande que puede ser realmente dicho número?

A título de curiosidad, ¿puede usted calcular el tiempo que tardaría en contar hasta un millón? Suponga que cuenta a la velocidad de un número por segundo y que no descansa ni para comer ni dormir. (No haga ningún cálculo todavía; estime solamente.) ¿Considera que tardaría menos de una hora? ¿Unas cuan-

tas horas? ¿Un día? ¿Unos cuantos días? ¿Más de una semana? ¿Un mes?

Determinemos cuánto tiempo tardaríamos en contar un millón. A la velocidad propuesta tardaríamos un millón de segundos. Una hora tiene 3 600 segundos; por lo tanto, tardaríamos 1 000 000: 3 600 o aproximadamente 278 horas. ¡Esto equivale aproximadamente a $11\frac{1}{2}$ días, contando noche y día sin descansar para llegar al millón!

Sí, un millón es un número grande, pero es **finito;** es decir, se puede contar. En ese sentido también consideramos al número "un billón" como finito, aun cuando no tengamos realmente necesidad de contar con él. ¿Puede imaginarse el tiempo que tardaría en contar hasta un billón?

¿Existe el número más grande? Es evidente que no, ya que si alguien pretendiese estar en posesión del mayor número del mundo, nos bastaría sumarle uno a dicho número para estar en posesión de un número mayor.

Uno de los números más grandes que se han mencionado es el llamado **googol.** Se ha definido como en uno seguido de cien ceros:

10000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000

¡Dicho número es mayor que el que se considera como número total de protones o electrones en el universo! Un googol puede expresarse, por medio de exponentes, como

$$10^{100}.$$

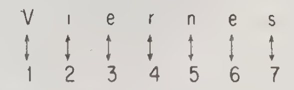
Aún mayor que el googol es el **googolplex,** definido como un uno seguido de un googol de ceros. ¡Un famoso matemático afirmaba que no hay espacio suficiente entre la Tierra y la Luna para escribir todos los ceros de un googolplex!

Sin embargo, por más que se alejen de la comprensión humana, dichos números siguen siendo finitos. Se nos puede, pues, plantear la duda de si existen o no números **infinitos,** es decir, que trascienden lo finito. Para aclarar dicha duda, recordemos los procedimientos empleados por el hombre en los albores de la historia.

Cuando el hombre de aquellos tiempos remotos quiso contar el número de animales que tenía, colocó sobre el suelo una piedrecilla por cada uno de los animales. Así el número de piedrecillas era el mismo que el número de animales. Había establecido una **correspondencia biunívoca** entre el conjunto de los animales

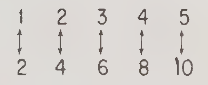
que poseía y el conjunto de piedrecillas, de tal forma que a cada piedrecilla le correspondía un animal y a cada animal le correspondía una piedrecilla.

Hoy en día cuando queremos contar, hacemos uso del conjunto de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5,... Ponemos en correspondencia biunívoca las cosas que contamos con los elementos de ese conjunto de números. Por ejemplo, para contar el número de letras de la palabra " viernes. " procedemos como sigue:

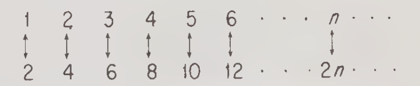


Se dice que el **cardinal** del conjunto de letras de la palabra es 7 . Un número que indica el tamaño de una colección se llama **número cardinal.** (De hecho cuando escribimos " 7 " estamos escribiendo un **símbolo numérico** y no un número. Los números son conceptos abstractos que no pueden representarse sobre el papel. Sin embargo, aquí y en el resto de la obra sólo distinguiremos entre número y su símbolo en aquellos casos que sea necesario.)

Cuando los elementos de dos conjuntos pueden ponerse en correspondencia biunívoca, se dice que los dos conjuntos son **equivalentes.** Así, el conjunto de letras de la palabra "matemáticas" es equivalente al conjunto de los once primeros números naturales. De un modo análogo, los dos siguientes conjuntos son equivalentes.



Por lo mismo, el conjunto de los números pares mayores que cero es equivalente al conjunto de los números naturales.



Cada número natural n puede aparearse con un número par $2n$.

Parece extraño que se pueda decir que esos dos conjuntos son equivalentes. ¡De hecho estamos diciendo que hay tantos números pares como números pares e impares juntos! Esto intrigó a los

matemáticos durante siglos hasta que un matemático alemán, Georg Cantor (1845-1918), a principios del siglo xx, desarrolló una teoría sobre conjuntos infinitos de números.

En esencia he aquí lo que hizo. Asignó un número cardinal al conjunto de los números naturales, a saber, $\aleph_0$. (léase, **aleph subíndice cero**) que define a un número **cardinal transfinito,** (que trasciende lo finito). Es correcto entonces decir que hay $\aleph_0$ números naturales, como lo es el decir que la semana tiene 7 días o que tenemos 10 dedos en las manos. Además, cualquier conjunto que pueda aparearse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales, también será de magnitud $\aleph_0$.

El estudio de los números transfinitos da lugar a ciertas aparentes paradojas muy interesantes. Entre las más famosas se destaca la de la historia de la casa infinita. Se trata de una casa que tiene un número infinito de cuartos, numerados 1, 2, 3, 4, 5,... Cada cuarto está ocupado por una persona. Es decir, hay una correspondencia biunívoca entre los cuartos y las personas que los ocupan. Hay $\aleph_0$ cuartos y $\aleph_0$ personas. Un buen día llega a la casa un forastero y solicita un cuarto. El encargado, aficionado a las matemáticas, se las ingenió de la siguiente manera para dar acomodo al visitante. Pidió a la persona del cuarto 1 que se pasara al cuarto 2, al ocupante del cuarto 2 le pidió que se pasase al cuarto 3, al ocupante del cuarto 3 que se pasase al cuarto 4, y así, en general, al ocupante del cuarto n que se pasase al cuarto $n + 1$. ¡De esta forma todas las personas ocuparon un cuarto, dejando el cuarto 1 para el forastero! En otras palabras, hemos demostrado que

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

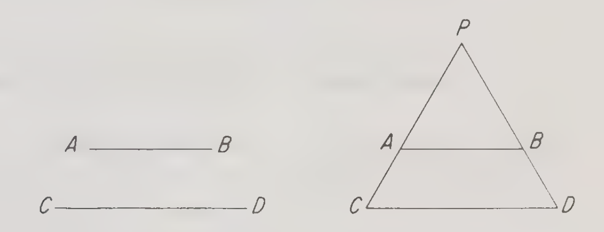
Días más tarde llegaron a la casa un número infinito de forasteros pidiendo cada uno un cuarto individual. Nuevamente el encargado se las arregló para acomodarlos. Simplemente pidió a cada huésped que se cambiase al cuarto cuyo número era el doble del que ocupaba. Es decir, el huésped del cuarto 1 se pasó al cuarto 2, el huésped del cuarto 2 se pasó al cuarto 4, el del cuarto 3 al 6, y, el del cuarto n al cuarto 2n. Una vez hecho el cambio quedaban disponibles los cuartos 1, 3, 5,..., para los nuevos visitantes. Esto es un ejemplo de otro hecho interesante del lenguaje de la aritmética transfinita:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

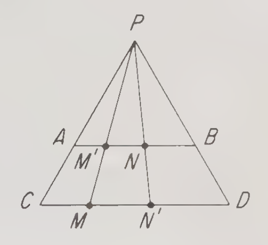
Como un ejemplo más de esta última conclusión, está el hecho de que tanto el conjunto de los números pares como el conjunto de los números impares son respectivamente de magnitud $\aleph_0$. Ahora

bien, el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares, juntos forman el conjunto de los números naturales cuya magnitud, según lo convenido, es $\aleph_0$. Por consiguiente, nuevamente vemos que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

En geometría tambien se presentan paradojas aparentes. Considérese el hecho de que un segmento de recta contiene un número infinito de puntos. A partir de esto, se puede demostrar el hecho de que dos segmentos de recta de longitudes desiguales contienen, no obstante, el mismo número de puntos. En efecto, consideremos los segmentos AB y CD y sea P el punto de intersección de las rectas CA y DB.



Se puede demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de los segmentos AB y CD. Dado sobre CD un punto cualquiera M, trácese el segmento PM. Dicho segmento corta a AB en un punto M' que corresponde a M. De igual forma, dado un punto cualquiera N sobre el segmento AB, al trazarse el segmento PN se puede prolongar hasta que corte a CD en un punto N' que corresponde a N. Existe, pues, una correspondencia biunívoca entre los puntos de los segmentos AB y CD, habiendo tantos puntos en el segmento AB como puntos hay en el segmento CD.



EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 1-3

1. Estime el tiempo que tardaría en contar hasta un billón a la velocidad de un número por segundo. Después calcúlelo en días.

2. Le ofrecen un trabajo por el que le pagan 1¢ el primer día, 2c el segundo día, 4c el tercer día y así sucesivamente. Es decir, le duplican el sueldo cada día. Primero estime y luego calcule el sueldo que tendría al cabo de 30 días.

3. En el ejercicio 2, calcule el ingreso total que obtendría en treinta días. Trate de obtener el resultado sin efectuar la suma de los sueldos diarios. A fin de ayudarle a descubrir la forma de hacer eso, considere primero las siguientes sumas:

(**a**) $1 + 2 + 4$ (**b**) $1 + 2 + 4 + 8$
(**c**) $1 + 2 + 4 + 8 + 16$ (**d**) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

4. Demuestre que el conjunto de los números (1, 2, 3, 4, 5,. . .) es equivalente al conjunto de los números (0, 1, 2, 3, 4, 5,. . .).

5. (**a**) Estime el número de segundos que transcurren en un siglo. (**b**) Calcule dicho número con un error menor que un millón.

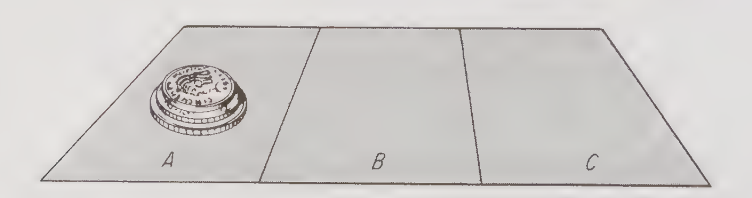
6. ¿Cuánto tiempo tardaría en gastar un millón de pesos si gasta un peso por minuto durante ocho horas al día?

7. Demuestre que hay tantos múltiplos de cinco (5, 10, 15, 20,. . .) como números naturales.

8. Estime la cantidad de centavos necesaria para formar un montón de una pulgada de alto. Aproximadamente ¿qué altura alcanzaría un montón de un millón de centavos?

***9.** ¿Cuántos ceros tiene el número que representa a un googol? Exprese dicho número por medio de exponentes. ¿Es menor o mayor que un googolplex?

***10.** Coloque tres monedas una encima de otra, de mayor a me-



nor, en una posición *A* tal como se muestra en la figura. Trate ahora de llevar las monedas, una a una, a la posición *C*. Las mo-

nedas pueden también colocarse en la posición *B*, con la única restricción de que ninguna moneda puede colocarse encima de otra que sea menor. La operación puede efectuarse en $2^3 - 1$, es decir, en 7 movimientos.

Añádase una nueva moneda a la pila y trate de hacer el cambio en $2^4 - 1$, es decir, en 15 movimientos.

Esto es un ejemplo de un famoso problema conocido con el nombre de la **Torre de Hanoi.** Los antiguos sacerdotes brahmanes tenían que hacer el cambio de una pila de 64 discos de tamaño decreciente, después de lo cual, según cuenta la leyenda, se acabaría el mundo. Dicho cambio requiere $2^{64} - 1$ movimientos. Trate de calcular el tiempo que se tardaría efectuando un movimiento por segundo.

1-4 PROBLEMAS IMPOSIBLES Y PROBLEMAS NO RESUELTOS

Antes de que llegue a la falsa conclusión de que los matemáticos lo saben todo, daremos término a este capítulo con una exposición de cosas que los matemáticos no saben.

En matemáticas existen algunos problemas que son imposibles. Es decir, los matemáticos han *demostrado* que ciertos problemas no pueden resolverse. Un ejemplo de ello es el problema de la trisección del ángulo. Se ha demostrado que en general es imposible dividir en tres partes iguales un ángulo dado mediante el solo empeo de una regla y un compás. No obstante, año con año se reportan numerosos "trisectores de ángulos" que pretenden alcanzar la fama asegurando que han resuelto el problema. Pierden el tiempo; el problema se ha resuelto: no se puede resolver.

El problema de la trisección del ángulo es uno de los tres problemas conocidos como **los problemas de la antigüedad.** Otro es el problema de la duplicación del cubo; es decir, construir un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado. La historia cuenta que habiendo asolado a Atenas una plaga, los ciudadanos consultaron el oráculo de Delos para saber cómo podrían aplacar la ira de los dioses, sugiriendo aquél la duplicación del altar cúbico de Apolo. Este problema, conocido también como el problema de Delos, fue estudiado por los antiguos griegos y desde entonces, durante muchos siglos, lo abordaron los matemáticos.

El tercer problema famoso es el de "la cuadratura del círculo"; es decir, la construcción de un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Estos tres problemas fueron estudiados por los matemáticos, lo cual dio lugar a importantes descubrimientos en geometría. No fue sino hasta el siglo diecinueve que finalmente se

demostró que ninguna de las tres construcciones es posible si sólo se utilizan una regla y un compás.

En otra categoría están aquellos problemas que a la fecha siguen sin resolverse, pese a la búsqueda de la solución por parte de los matemáticos durante siglos. Muchos de esos problemas tienen un enunciado tan elemental que son comprensibles para cualquier lego, y, sin embargo, en la búsqueda de la solución han fracasado los más duchos. He aquí algunos ejemplos de problemas cuya solución no se ha determinado todavía.

ULTIMO TEOREMA DE FERMAT

Sabemos que existen infinidad de soluciones para x, y y z tales que $x^2 + y^2 = z^2$. Por ejemplo, $3^2 + 4^2 = 5^2$ y $5^2 + 12^2 = 13^2$. (¿Puede usted determinar otras?) Se supone que es imposible determinar soluciones para x, y y z tales que $x^n + y^n = z^n$ donde n es mayor que 2 y x, y y z son números naturales. Por ejemplo, no se pueden determinar soluciones para x, y y z tales que $x^3 + y^3 = z^3$. Un gran matemático, Pierre de Fermat (1601-1665), escribió al margen de una de sus obras: "He descubierto una notable demostración (de la imposibilidad de dicho problema), demasiado extensa para los límites de este trabajo."

Desde entonces ningún matemático ha sido capaz de descubrir la demostración, si bien se ha probado para valores de n que llegan hasta 4002.

LA CONJETURA DE GOLDBACH

Un entero mayor que 1 que sólo es divisible por 1 por sí mismo se dice que es un *número primo*. Por ejemplo, los primeros números primos son

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.$$

Un matemático, Goldbach, conjeturó que cada número natural par mayor que 2 puede descomponerse en una suma de dos números primos; por ejemplo, $12 = 5 + 7$, $20 = 7 + 13$, $30 = 13 + 17$. Nadie ha podido determinar un número que no pueda descomponerse de tal modo, pero tampoco se ha podido demostrar que todo número par puede descomponerse como la suma de dos números primos.

Existen otras conjeturas no demostradas relativas a los números primos. Las parejas de números primos tales como 3 y 5, 11 y 13, 41 y 43, 101 y 103 reciben el nombre de *primos gemelos*. ¿Existe un número infinito de parejas de números primos que difieran en 2 unidades? Nadie lo sabe.

Nadie ha sido capaz de descubrir una fórmula que determine siempre números primos. Una de las fórmulas propuestas

$$n^2 - n + 41.$$

es válida para valores de n desde 1 hasta 40. Sin embargo, para $n = 41$ no se obtiene un número primo. Pierre de Fermat creyó tener la fórmula en la expresión

$$2^{2^n} + 1.$$

Para valores de $n = 1, 2, 3, 4$, se obtienen números primos. Sin embargo, un siglo más tarde, otro matemático descubrió que para $n = 5$, la fórmula determina el número 4 294 967 297 que no es primo, dado que

$$4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

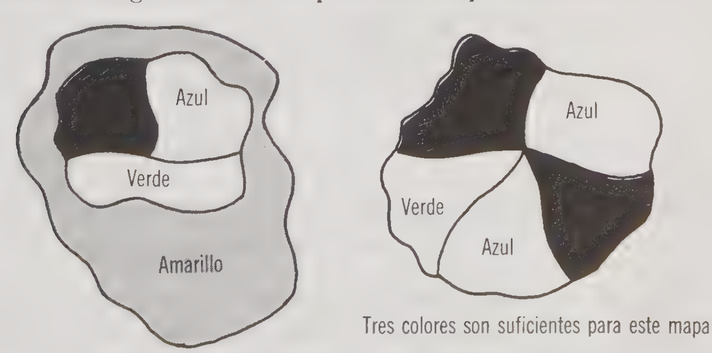
Euclides demostró que no existe un número primo máximo. No obstante, los matemáticos siempre han estado interesados en determinar el mayor número primo con la esperanza de obtener mayores conocimientos sobre esta rama de la teoría de los números. En el tiempo que se escribía este libro, el mayor número primo conocido por el hombre era

$$2^{11,213} - 1,$$

un numero con 3376 dígitos. A la fecha nadie ha sido capaz de descubrir una fórmula que determine siempre números primos, como tampoco nadie ha demostrado que una tal fórmula no existe. El problema queda para los matemáticos del futuro, si bien puede suceder que mañana lea en el periódico la noticia de un tal descubrimiento.

EL PROBLEMA DE LOS CUATRO COLORES

A mediados del siglo XIX se les planteó un problema a los car-



Se requieren cuatro colores para este mapa

Tres colores son suficientes para este mapa

tógrafos que hoy en día sigue sin solución. Dicho problema, conocido como el problema de los cuatro colores, consiste en colorear los mapas usando a lo sumo cuatro colores. Cuando dos países tienen frontera común, deben tener diferente color. Si tienen sólo puntos en común, pueden tener el mismo color. La figura muestra dos ejemplos de dichas restricciones.

Nadie ha sido capaz de diseñar un mapa que requiera más de cuatro colores, pero nadie ha podido demostrar que cuatro colores son suficientes para cualquier mapa. Sin embargo, se ha demostrado que si un mapa requiere cinco colores, tendrá que tener al menos 36 países. También se ha demostrado que cinco colores son suficientes para todos los mapas, pero no forzosamente necesarios.

DECIMALES INFINITOS

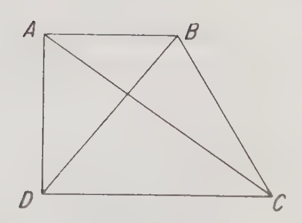
Todo número real puede expresarse en forma decimal. En particular, $\sqrt{2} = 1.4142. \ldots$ Dicha forma decimal es indefinida y no periódica; podemos determinar tantos decimales como queramos. Sin embargo, no se han podido contestar preguntas como las siguientes, relativas a la forma decimal de $\sqrt{2}$:

(a) ¿Se presentarán cinco cincos consecutivos?
(b) ¿Se presentan infinidad de unos?
(c) ¿Aparecerá la secuencia 1, 2, 3, 4, 5?

Como se puede ver, el lector tiene la posibilidad de hacerse famoso, ya sea resolviendo alguno de estos problemas o proponiendo otros que los matemáticos no puedan resolver. Los problemas propuestos en el siguiente conjunto de ejercicios requieren algún descubrimiento por parte del lector. Todos ellos se pueden resolver, si bien para algunos la solución puede ser la de que son imposibles. Debe tratarse de determinar las soluciones de los que son posibles e identificar los imposibles.

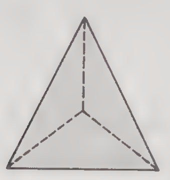
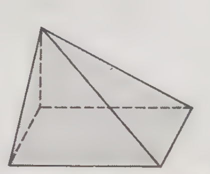
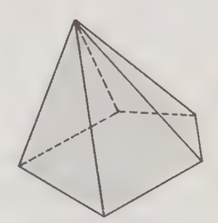
EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 1-4

1. Una diagonal de un polígono es el segmento de recta que une dos vértices no adyacentes. Por ejemplo, en la figura, AC y BD son diagonales.



(a) ¿Cuántas diagonales pueden trazarse en un pentágono (polígono de cinco lados)?
(b) ¿Cuántas diagonales pueden trazarse en un hexágono (polígono de seis lados)?
(c) En general, determínese una fórmula para D, siendo D el número de diagonales de un polígono de n lados.

2. Queremos colorear cada una de las siguientes pirámides de tal forma que las caras que tenga una arista común no sean del mismo color.

(a) ¿Cuál es el número mínimo de colores necesarios para cada pirámide?
*(b) ¿Qué relación existe entre el número mínimo de colores necesarios y el número de caras de la pirámide?

3. Estudie cada una de las siguientes igualdades:

$$25^2 = 2 \times 300 + 25 = 625$$
$$35^2 = 3 \times 400 + 25 = 1225$$
$$45^2 = 4 \times 500 + 25 = 2025$$

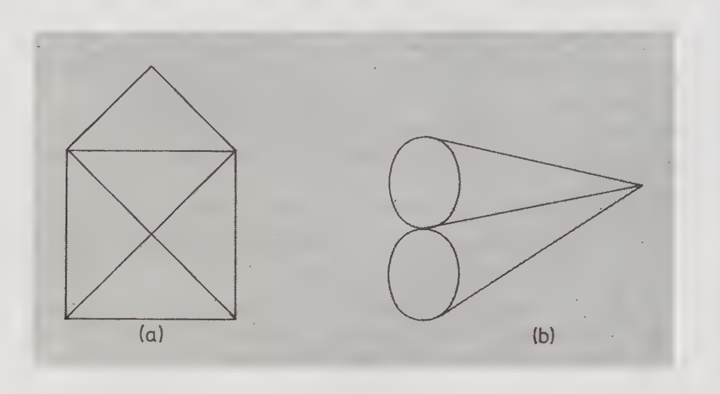
(a) Enuncie un método abreviado para elevar al cuadrado un número de dos dígitos de los cuales el de las unidades sea 5.
*(b) Dé una explicación algebraica para dicho método.

4. Trate de conectar por medio de líneas tres casas localizadas en A, B y C con tres servicios públicos localizados en X, Y y Z de tal modo que las líneas de conexión no se intersecten.

•A •B •C

•X •Y •Z

5. Trate de dibujar cada una de las siguientes figuras, de un solo trazo, sin repetir ninguno de los segmentos.



6. Escriba la representación decimal de $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ y $\frac{6}{7}$. Vea si puede descubrir una relación entre las series de dígitos que se repiten.

7. Una serie infinita es una suma en la cual el número de sumandos es infinito. Algunas de estas series tienen ciertos números como límite. Considérese la siguiente serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

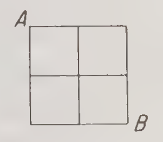
Considérese la suma de los dos primeros términos, de los tres primeros términos, de los cuatro primeros términos, etc. Ahora trate de decir cuál es el límite de la serie cuando el número de sus términos aumenta indefinidamente.

8. Aplique el procedimiento sugerido en el Ejercicio 7 para determinar los límites, si es que existen, de las siguientes series:

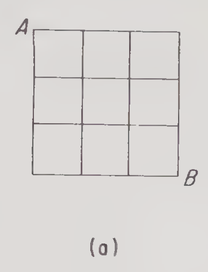
(a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$

(b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$

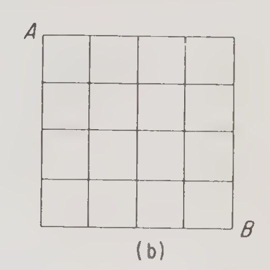
9. Se desea pasar de *A* a *B* en la siguiente figura. ¿Cuántos caminos pueden seguirse si no se puede ir ni a la izquierda ni hacia arriba?



10. Repita el Ejercicio 9 con cada una de las siguientes figuras.

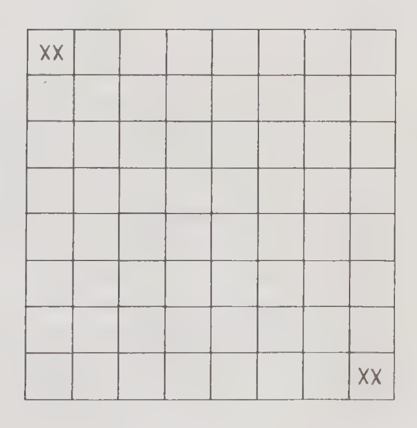


(a)



(b)

***11.** Considérense *n* puntos dados tales que ninguna terna esté alineada. ¿Cuántos segmentos de rectas que tengan por puntos extremos dos de esos *n* puntos se pueden trazar si *n* es **(a)** 3; **(b)** 4; **(c)** 5; **(d)** *n*?



***12.** Se tiene un tablero de ajedrez y un juego de dominó. Cada

ficha del dominó cubre dos cuadros del tablero. ¿Pueden colocarse las fichas del dominó de tal forma que cubran todo el tablero de ajedrez excepto los dos cuadros opuestos? (es decir, necesita dejar descubiertos los dos cuadrados marcados con XX en la figura).

*13. Se llama *número perfecto* al que es igual a la suma de sus divisores, no incluido el número mismo. El 6 es número perfecto dado que $6 = 1 + 2 + 3$. A la fecha nadie ha determinado un número perfecto impar, pero nadie ha demostrado que todo número perfecto es par. ¿Puede usted determinar el siguiente número perfecto que sigue al 6?

Capítulo 2

SISTEMAS DE NUMERACION

Por lo general solemos aceptar sin más el empleo de nuestro sistema de notación, así como nuestros procedimientos de cálculo, sin detenernos a pensar que son producto del trabajo creativo del hombre a través del tiempo. Podremos apreciar mejor nuestro propio sistema de numeración y los métodos de cálculo si nos detenemos a examinar otros sistemas.

En este capítulo haremos un viaje a través del tiempo, remontándonos hasta los antiguos egipcios, para examinar el sistema de numeración que utilizaban, según se muestra en sus jeroglíficos. Después, volviendo a nuestros días, estudiaremos el sistema binario, base matemática de las modernas computadoras.

El lector podrá observar entonces la evolución del pensamiento matemático del género humano que ha tenido lugar desde los

tiempos remotos hasta nuestros días, evolución que bien puede equipararse al desarrollo creativo en otros campos. Los sistemas de numeración son hoy en día parte importante del conocimiento de toda persona preparada, pues proporcionan las bases de muchos tópicos de actualidad que se abordan en los cursos de matemáticas de enseñanza primaria y secundaria.

2-1 NUMERACION EGIPCIA

Primero distinguiremos entre *número* y *símbolo numérico*. Un número es un concepto abstracto; un **símbolo numérico** es una forma de representar a un número. Escribimos símbolos numéricos; no podemos escribir números. Desde un punto de vista semejante, cuando se ve la palabra "perro" escrita sobre una hoja de papel, se está viendo el nombre de un animal y no el animal en sí.

A través del libro haremos la distinción entre número y símbolo numérico sólo en aquellos casos en que pueda servirnos para la comprensión de algún concepto. A título de ejemplo, consideremos el número que representa el número de elementos en la siguiente colección de símbolos:

x x x x x
x x x x x

En nuestro sistema de notación lo escribimos con un 10. Los egipcios utilizaron el símbolo ∩. Los babilonios emplearon el símbolo <. Los romanos lo escribían con X. Todos esos símbolos —y existen otros— son simplemente eso, símbolos numéricos. Es decir, son diferentes formas de representar (darle nombre) al mismo número.

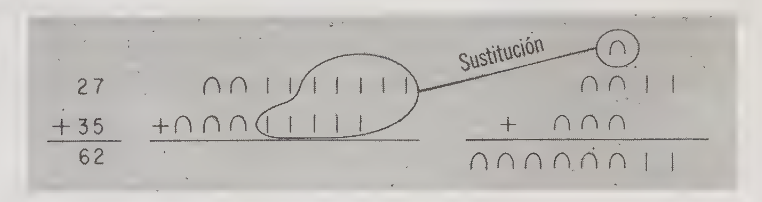
Analicemos en detalle uno de esos sistemas. Consideremos el de los egipcios. Aquéllos usaban un símbolo distinto para cada potencia de diez. Exponemos aquí algunos de aquellos símbolos, el objeto físico que representaban, así como el número que representan en nuestra notación:

𓏺	Báculo vertical	1
𓎆	Cuenco boca abajo	10
𓍢	Rollo de pergamino	100
𓆼	Flor de loto	1000
𓂭	Dedo apuntando	10,000

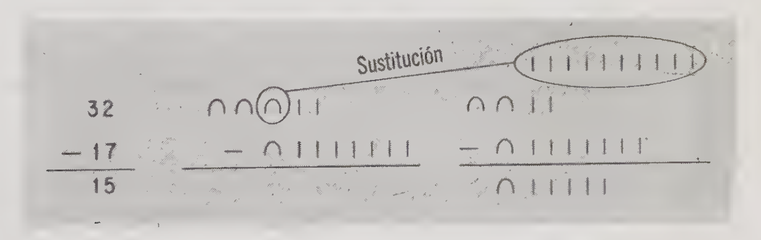
El sistema egipcio se dice que es de **base** diez, pero no tiene valor posicional. La "base" diez se debe al empleo de potencias de diez. A nuestro sistema de numeración le damos el nombre de **sistema decimal** para recalcar el empleo de las potencias de diez. La ausencia de un valor posicional implica que la posición de los símbolos no afecta al número representado. Por ejemplo, en nuestro sistema decimal de numeración, 23 y 32 representan números diferentes. En el sistema egipcio, ∩| y |∩ son formas diferentes de escribir once, es decir, diferentes nombres o símbolos numéricos para el mismo número. (La primera notación es la que por lo general se ha encontrado en los jeroglíficos.) He aquí otros ejemplos del sistema decimal y su representación con símbolos egipcios.

25	∩∩|||||
142	𓍢∩∩∩∩||
12,321	𓂭𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢∩∩|

Aunque tediosa, había forma de hacer cómputos con el sistema egipcio. Por ejemplo, he aquí los pasos para sumar 27 y 35.



Obsérvese que en el sistema egipcio, una colección de diez unos se sustituía por un símbolo de diez antes de efectuar el cómputo final. En nuestro sistema decimal hacemos mentalmente un cambio análogo de diez unos por un diez cuando expresamos, por ejemplo, (7 + 5) como un diez y dos unos. En forma análoga procedemos en la resta.



Los antiguos egipcios multiplicaban mediante un proceso de duplicación. Dicho proceso se basa en el hecho de que cualquier

número puede representarse como una suma de potencias de dos. Por ejemplo, $19 = 1 + 2 + 16$. Para determinar el producto de 19×25 primero duplicamos el 25 como sigue:

$$\textcircled{1} \times 25 = \textcircled{25}$$
$$\textcircled{2} \times 25 = \textcircled{50}$$
$$4 \times 25 = 100$$
$$8 \times 25 = 200$$
$$\textcircled{16} \times 25 = \textcircled{400}$$

Después se determina el producto de 19×25 sumando los múltiplos de 25 que corresponden a 1, 2 y 16:

$$19 = 1 + 2 + 16$$
$$19 \times 25 = (1 + 2 + 16) \times 25$$
$$= 25 + 50 + 400 = 475$$

EJEMPLO 1: Determinar el producto de 23×41 aplicando el método de multiplicar egipcio.

Solución:

$$\textcircled{1} \times 41 = \textcircled{41}$$
$$\textcircled{2} \times 41 = \textcircled{82}$$
$$\textcircled{4} \times 41 = \textcircled{164}$$
$$8 \times 41 = 328$$
$$\textcircled{16} \times 41 = \textcircled{656}$$

$$23 = 1 + 2 + 4 + 16$$
$$23 \times 41 = (1 + 2 + 4 + 16) \times 41$$
$$= 41 + 82 + 164 + 656 = 943$$

Más tarde los egipcios adoptan un procedimiento para multiplicar más refinado y rápido, conocido como el método de **duplicación** y **mediación** que consiste en duplicar uno de los factores y sacar la mitad al otro. Por ejemplo, para determinar el producto de 19×25 se va sacando mitad a 19 sucesivamente, sin tener en

cuenta los residuos de cada paso, y al mismo tiempo se va duplicando el 25, tal como a continuación se expone:

19 ⟶	(25)
9 ⟶	(50)
4	100
2	200
1 ⟶	(400)

Nota: dado que no se tiene en cuenta ninguno de los restos, la mitad de 19 se considera como 9 y la mitad de 9 como 4.

El proceso se termina cuando se obtiene un 1 en la columna de los números que se han ido dividiendo entre dos. A cada uno de los números de esta columna le corresponde un número en la columna de los números que se han duplicado. El producto de 19 $\times$ 25 se obtiene como la suma de los números que se oponen a los números **impares** de la columna de las mitades:

$$19 \times 25 = 25 + 50 + 400 = 475$$

Obsérvese que este proceso selecciona automáticamente los sumandos que haya que considerar en la determinación del producto; no es necesario determinar las potencias apropiadas de dos que deben emplearse.

EJEMPLO 2: Determinar el producto de 23 $\times$ 41 aplicando el método de duplicación y mediación.

Solución:

23 ⟶	(41)
11 ⟶	(82)
5 ⟶	(164)
2	328
1 ⟶	(656)

$$23 \times 41 = 41 + 82 + 164 + 656 = 943$$

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 2-1

Escribir en notación egipcia:

1. 25 **2.** 138
3. 1426 **4.** 40
5. 12,407 **6.** 5723

Escribir en notación decimal:

7. 𓎆𓎆𓏺𓏺 **9.** 𓍢𓍢𓎆𓏺 **11.** 𓆼𓍢𓏺𓏺
8. 𓆼𓆼𓍢𓍢𓎆𓏺 **10.** 𓆼𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺 **12.** 𓆼𓍢𓍢𓎆𓏺𓏺

Escribir en notación egipcia y efectuar en dicho sistema las operaciones indicadas:

13. $\begin{array}{r} 42 \\ +21 \\ \hline \end{array}$ **14.** $\begin{array}{r} 153 \\ +62 \\ \hline \end{array}$

15. $\begin{array}{r} 238 \\ +135 \\ \hline \end{array}$ **16.** $\begin{array}{r} 431 \\ -213 \\ \hline \end{array}$

17. $\begin{array}{r} 1243 \\ -137 \\ \hline \end{array}$ **18.** $\begin{array}{r} 507 \\ -124 \\ \hline \end{array}$

Aplicar el método de duplicación para determinar los siguientes productos:

19. 17×45 **20.** 15×35
21. 27×31 **22.** 31×19

Aplicar el método egipcio de duplicación y mediación para determinar los siguientes productos:

23. 19×33 **24.** 24×51
25. 21×52 **26.** 37×80

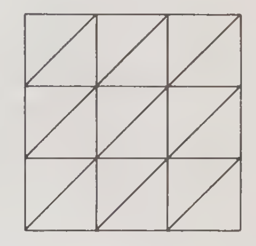
27. Los egipcios no tenían símbolo para el cero. ¿Por qué se requiere dicho símbolo en nuestro sistema de numeración? ¿Por qué los egipcios no necesitaron inventarlo?

2-2 OTROS METODOS DE CALCULAR

Existen numerosos ejemplos de las formas en que los hombres antiguos efectuaban sus cálculos. Algunos de ellos pueden ser interesantes para el lector. Entre los más interesantes, podemos destacar el método para multiplicar que apareció en una de las primeras aritméticas publicadas en Italia, la *Aritmética de Treviso* (1478).

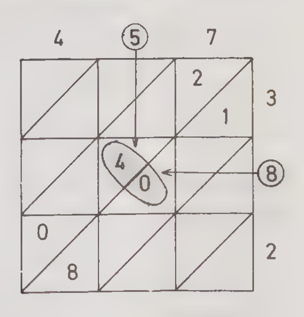
Utilizaremos dicho método para determinàr el producto de 457 y 382. (Haremos referencia a dicho proceso bajo el nombre de multiplicación por "galeras", si bien se le dio el nombre de multiplicación "gelosia" en el texto original.)

Primero preparemos una "galera" con tres filas y tres columnas y tracemos las diagonales como se ve en la figura. El que el



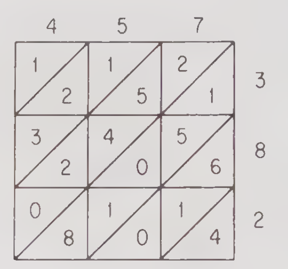
número de filas y columnas sea tres, se debe a que tenemos que multiplicar números de tres dígitos.

Coloquemos los dígitos 4, 5 y 7 en orden de izquierda a derecha en el encabezado de las columnas. Coloquemos los dígitos 3, 8 y 2 en orden de arriba hacia abajo a la derecha de las filas. Ahora, cada uno de los productos de un dígito de 457 y un dígito de 382, a los que llamaremos **productos parciales,** se sitúan en la intersección de la columna y la fila de los dígitos. La diagonal se-

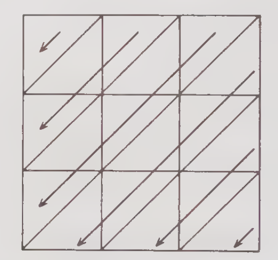


para a los dígitos del producto parcial (el dígito de las decenas encima del dígito de las unidades). Por ejemplo, el producto parcial $3 \times 7 = 21$ se coloca en la parte superior derecha de la "ga-

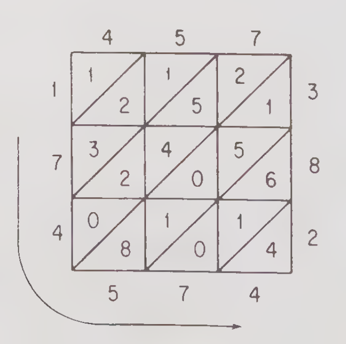
lera"; el producto parcial $5 \times 8 = 40$ se coloca en el centro de la galera; $4 \times 2 = 8$, este producto parcial que se escribe como 08 se coloca en la parte inferior izquierda de la galera. Verifique el lector que la tabla completa quedaría en la siguiente forma.



Una vez efectuados todos los productos parciales, se efectúa la suma siguiendo las diagonales, empezando por la parte inferior derecha y considerando los posibles acarreos para la siguiente diagonal. El diagrama siguiente indica dicho modelo.

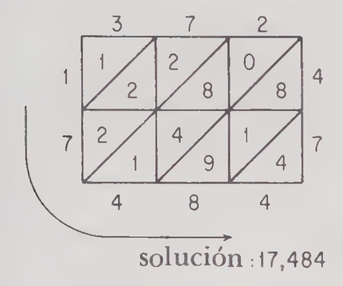


El problema terminado ofrece el esquema que a continuación se muestra. El resultado final, como lo indica la flecha en la figura, se lee como 174 574. Obsérvese que los dígitos del producto se leen en sentido opuesto al correspondiente al orden en que se obtuvieron.

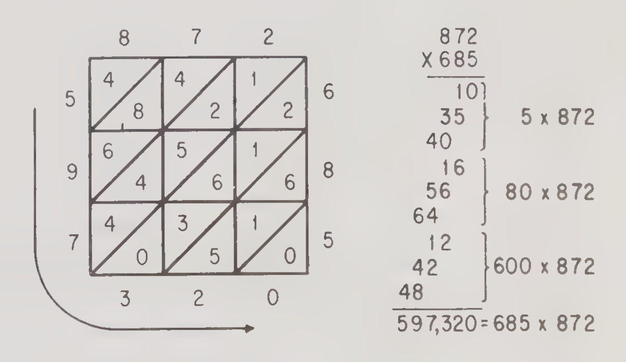


EJEMPLO 1: Utilice la multiplicación de galeras y multiplique 372 por 47.

Solución:



Dicho procedimiento funciona dado que en realidad estamos considerando todos los productos parciales antes de sumar. Compare las dos siguientes operaciones



Obsérvese que los números a lo largo de las diagonales corresponden a los de las columnas de la derecha.

El matemático inglés John Napier hizo uso de este sistema al investigar sobre cuestiones que hicieron de él uno de los precursores de las computadoras modernas. A su invento se le da el nombre de **listas de Napier** o **plantillas de Napier.** A Napier (1550-1617) se le conoce, en general, como el inventor de los logaritmos.

Para hacer un conjunto de dichas listas necesitamos preparar previamente una colección de tablas con múltiplos de cada uno

de los dígitos. Examine el lector el conjunto de listas que se muestran a continuación en la Figura A.

Indice	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
2	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

(A)

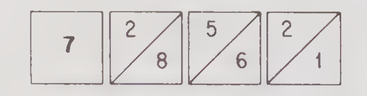
Indice	4	8	3
1	0/4	0/8	0
2	0/8	1/6	0
3	1/2	2/4	0
4	1/6	3/2	1
5	2/0	4/0	1
6	2/4	4/8	1
7	2/8	5/6	2
8	3/2	6/4	2
9	3/6	7/2	2

(B)

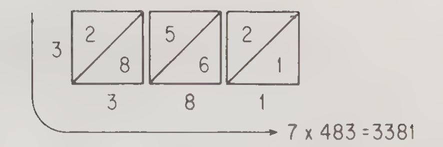
Obsérvese que, por ejemplo, la tabla encabezada por el núme-9, contiene los múltiplos de 9:9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 y 81.

Podemos emplear dichas tablas para multiplicar dos números. Para multiplicar 7 × 483, colóquense las tablas encabezadas por los números 4, 8 y 3 junto al índice, como se muestra en la Figura B.

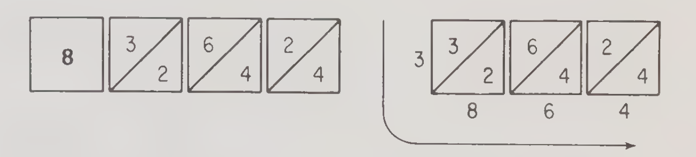
Considérese el renglón correspondiente al índice 7.



Súmese a lo largo de las diagonales como en la "multiplicación por galeras".



Se puede utilizar la misma disposición de las tablas para leer de inmediato el producto de 483 y un número cualquiera de un dígito. Con práctica se puede obtener una rapidez de cálculo considerable mediante el empleo de dichas tablas. Por ejemplo, $8 \times 483 = 3\,864$ se determina como sigue:



Combinando dos resultados previos, se pueden determinar productos tales como 87×483:

$$\begin{array}{r} 483 \\ \times 87 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 7 \times 483 & = & 3\,381 \\ 80 \times 483 & = & 38\,640 \\ \hline 87 \times 483 & = & 42\,021 \end{array}$$

Obsérvese que en las tablas sólo se pueden leer directamente productos, uno de cuyos factores sea de un solo dígito.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 2-2

Multiplique por el método de "galeras":

1. $\begin{array}{r} 492 \\ \times 37 \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 568 \\ \times 429 \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 432 \\ \times 276 \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 4876 \\ \times 27 \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 7025 \\ \times 398 \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 5081 \\ \times 2376 \\ \hline \end{array}$

Construya un conjunto de tablas de Napier y utilícelas para obtener cada uno de los siguientes productos:

7. $\begin{array}{r} 256 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{r} 427 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 387 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$

10. $\begin{array}{r} 592 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$

11. $\begin{array}{r} 7256 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$

12. $\begin{array}{r} 427 \\ \times 36 \\ \hline \end{array}$

2-3 NOTACION DECIMAL

Dirijamos ahora nuestra atención al **sistema de notación decimal.** Es un sistema decimal en el sentido de que está basado en potencias o grupos de diez. Además, tiene un valor posicional, es decir, el valor de cada dígito depende de la posición que ocupa. Así, los dos 4 en el número 484 tienen diferentes valores.

A fin de ilustrar este último concepto, escribiremos dicho número, 484, en lo que se conoce como **notación desarrollada.**

$$\begin{aligned} 484 &= 4 \text{ centenas} + 8 \text{ decenas} + 4 \text{ unidades} \\ &= (4 \times 100) + (8 \times 10) + (4 \times 1) \end{aligned}$$

Obsérvese que uno de los dos números 4 representan 4 centenas en tanto que el otro representa 4 unidades, es decir, 4 unos.

Es conveniente el uso de exponentes cuando se escriben números en notación desarrollada. Un **exponente** es un número que nos indica las veces que otro número, llamado **base,** se toma como factor. Por ejemplo, en la expresión 7^2, el 2 es el exponente y el 7 la base. Obsérvese que, $7^2 = 7 \times 7 = 49$; en forma análoga, $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 243$.

Utilizando exponentes para escribir 484 en notación desarrollada, se tiene

$$\begin{aligned} 484 &= (4 \times 100) + (8 \times 10) + (4 \times 1) \\ &= (4 \times 10^2) + (8 \times 10) + (4 \times 1). \end{aligned}$$

El cero tiene un papel importantísimo en la notación posicional. En efecto, el empleo del símbolo 0 es el que nos permite escribir números tan grandes como queramos en la notación decimal,

mediante el uso exclusivo de los diez dígitos. En la numeración egipcia, 𓎆 representa 10, 𓍢 representa 100, 𓆼 representa 1000, etcétera. Es decir, cada una de las diferentes potencias de 10 requiere un nuevo símbolo, en tanto que en nuestro sistema decimal el símbolo 0 nos permite escribir 10, 100, 1000, etc., utilizando únicamente los dígitos 0 y 1.

EJEMPLO 1: Escribir 2306 en notación desarrollada.

Solución:

$$2306 = (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (0 \times 10) + (6 \times 1).$$

Podemos hacer uso del exponente 1 para indicar que un número se toma una sola vez como factor, así, $10^1 = 10$. Se define también que $10^0 = 1$.

Aplicando dichos exponentes, se tiene

$$2306 = (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (6 \times 10^0).$$

Veamos por qué se define $10^\circ = 1$. Consideremos el cociente a^m/a^m. Según una ley de los exponentes, para determinar el cociente se restan los exponentes, teniéndose $a^{m-m} = a^\circ$. Por otra parte, cualquier número (excepto cero) dividido entre sí mismo es igual a 1. Por consiguiente $a^m/a^m = 1$. Por lo tanto podemos decir que $a^\circ = 1$ para toda $a \neq 0$.

Los exponentes negativos se aplican del modo siguiente para escribir decimales:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

Obsérvese que para cualquier entero k se tiene $10^{-k} = \frac{1}{10^k}$.

En general, $b^{-k} = \frac{1}{b^k}$. Por ejemplo,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8};$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25};$$

$$3^2 = \frac{1}{3^{-2}}.$$

Ahora estamos en condiciones de escribir en notación desarrollada cualquier número dado en notación decimal, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2: Escribir 8 027.45 en notación desarrollada.

$$8027.45 = (8 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (7 \times 10^0) + (4 \times 10^{-1}) + (5 \times 10^{-2}).$$

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 2-3

Escribir en notación decimal:

1. 5^3
2. 3^5
3. 10^{-3}
4. 10^{-5}
5. 8^0
6. 8×10^2
7. 4×10^{-2}
8. 5×10^{-1}
9. 2×10^3
10. 9×10^{-3}
***11.** 0.2×10^{-3}
***12.** 0.01×10^4

Escribir en notación desarrollada:

13. 432
14. 407
15. 4.23
16. 79.8
17. 2345
18. 2.758

19. 423.83

20. 2302.05

21. 0.007

22. 2.0301

23. 0.0001

24. 9000.09

Escribir en notación decimal:

25. $(3 \times 10^3) + (2 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (3 \times 10^0)$

26. $(2 \times 10^{-1}) + (3 \times 10^{-2}) + (5 \times 10^{-3})$

27. $(5 \times 10^1) + (2 \times 10^0) + (1 \times 10^{-1}) + (7 \times 10^{-2}) + (3 \times 10^{-3})$

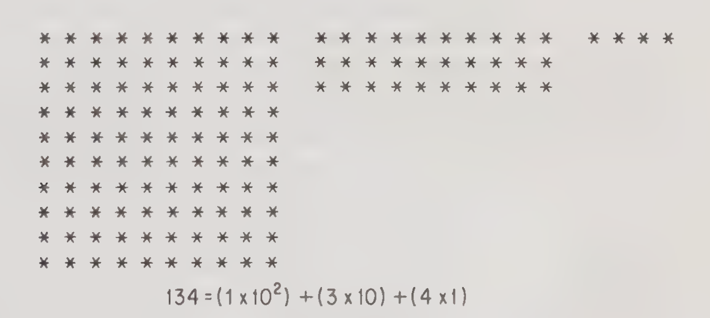
28. $(7 \times 10^1) + (0 \times 10^0) + (0 \times 10^{-1}) + (8 \times 10^{-2}) + (2 \times 10^{-3})$

29. $(2 \times 10^{-2}) + (5 \times 10^{-3}) + (1 \times 10^{-4})$

30. $(5 \times 10^3) + (7 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (5 \times 10^0) + (5 \times 10^{-1})$

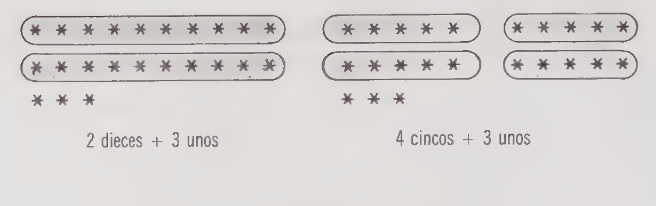
2-4 OTROS SISTEMAS DE NOTACION

En nuestro sistema de notación decimal, los objetos se agrupan y se cuentan por grupos de diez y potencias de diez. Por ejemplo, en el diagrama que sigue se muestra cómo se pueden agrupar y contar 134 objetos.



$134 = (1 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 1)$

Podríamos, sin embargo, agruparlos en otras formas. En la siguiente figura se muestran cómo se agrupan 23 asteriscos en tres formas diferentes.





2 nueves + 5 unos

Si utilizamos subíndices para indicar el modo de agruparlos, podemos entonces escribir diferentes símbolos numéricos (nombres) para representar el número de objetos de la misma colección:

23_{diez}	43_{cinco}	25_{nueve}
(2 *dieces* + 3 unos)	(4 *cincos* + 3 unos)	(2 *nueves* + 5 unos)

43_{cinco} se lee "cuarenta y tres, en base cinco".
25_{nueve} se lee "veinticinco, en base nueve".

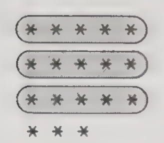
Cada uno de los símbolos anteriores representa al número de asteriscos en el mismo conjunto de asteriscos. Otro símbolo más para dicho número sería 35_{seis}:

$$35_{\text{seis}} = 3 \text{ seises} + 5 \text{ unos} = 18 + 5 = 23$$

A nuestro sistema de notación decimal le damos el nombre de sistema de **base diez.** Cuando no se indica ningún subíndice, se sobreentiende que el número está expresado en base diez. Cuando agrupamos por cincos, se tiene un sistema de notación de **base cinco.** Es decir, al sistema de notación le damos el nombre de acuerdo al modo en que se efectúa el agrupamiento.

EJEMPLO 1: Hágase un diagrama para 18 objetos y escríbase su correspondiente símbolo numérico (a) en base cinco y (b) en base ocho.

Solución:



33 cinco
(3 cincos + 3 unos)

22 ocho
(2 ochos + 2 unos)

EJEMPLO 2: Escribir en base seis la representación de 27.

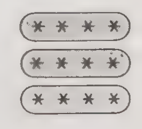
Solución: Se observa que 27 = 4 seises + 3 unos; por consiguiente 27 = 43 seis.

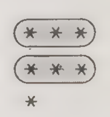
EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 2-4

Escríbanse símbolos numéricos para cada una de las siguientes colecciones en las bases que se indican por la forma de agrupamiento.









Hágase un diagrama para hacer ver el significado de cada una de las siguientes expresiones:

5. 24 cinco
6. 23 seis
7. 25 siete
8. 32 nueve
9. 23 cuatro
10. 12 tres

Cambie a notación de base diez:

11. 43 cinco
12. 24 siete
13. 32 ocho
14. 51 seis

15. 34 cinco **16.** 32 cuatro

17. Escriba 17 en notación de base cinco.

18. Escriba 43 en notación de base ocho.

19. Escriba 20 en notación de base seis.

***20.** Cambie a notación de base diez 132_{cinco}.

2-5 NUMERACION EN BASE CINCO

En esta sección investigaremos, con más detalle, la forma de escribir números en otra base. Trabajaremos con un sistema de base cinco ya que es conveniente pensar en números expresados en términos de los dedos y de las manos. Así por ejemplo, 23 cinco puede considerarse como la representación de un número en términos de dos manos y tres dedos; es decir, como 2 cincos y 3 unos.

Por conveniencia, todos los números en base cinco los escribiremos con el subíndice 5, como por ejemplo 23_5. Como se ha convenido, los números escritos sin subíndice se sobreentiende que están en base diez. Por consiguiente, es correcto escribir:

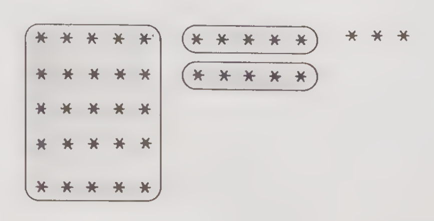
$$23_5 = 13.$$

Recuerde que no son más que dos formas diferentes de representar al mismo número. (Dos cincos + tres unos representa al mismo número que un diez + tres unos).

Podemos hacer un diagrama como el que se muestra a continuación para hacer ver el significado de 23_5 con dos grupos de cinco y tres unos.



De forma análoga podemos representar gráficamente 123_5 como un grupo de 25, dos grupos de 5 y tres unos. Obsérvese que el grupo de 25 representa cinco grupos de 5, es decir, un grupo de 5^2.



En el sistema de notación decimal, los números se expresan en términos de potencias de diez utilizando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Por ejemplo

$$234 = (2 \times 10^2) + (3 \times 10^1) + (4 \times 10^0).$$

En base cinco los números se expresan en términos de potencias de cinco utilizando los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4. Por ejemplo

$$43_5 = (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0);$$
$$324_5 = (3 \times 5^2) + (2 \times 5^1) + (4 \times 5^0);$$
$$2143_5 = (2 \times 5^3) + (1 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0).$$

Obsérvese que $5^0 = 1$.

En la siguiente tabla se dan los números del 1 a 30 escritos en base cinco.

Base 10	*Base 5*	*Base 10*	*Base 5*	*Base 10*	*Base 5*
1	1	11	21_5	21	41_5
2	2	12	22_5	22	42_5
3	3	13	23_5	23	43_5
4	4	14	24_5	24	44_5
5	10_5	15	30_5	25	100_5
6	11_5	16	31_5	26	101_5
7	12_5	17	32_5	27	102_5
8	13_5	18	33_5	28	103_5
9	14_5	19	34_5	29	104_5
10	20_5	20	40_5	30	110_5

Para convertir un número que no aparezca en la tabla en base 5 a la notación en base 10, exprésese el número en términos de sus potencias de 5 y simplifíquese.

EJEMPLO 1: Convertir a base 10 el número 3214_5.

Solución:

$$\begin{aligned} 3214_5 &= (3 \times 5^3) + (2 \times 5^2) + (1 \times 5^1) + (4 \times 5^0) \\ &= (3 \times 125) + (2 \times 25) + (1 \times 5) + (4 \times 1) \\ &= 434. \end{aligned}$$

En base cinco se puede utilizar un punto quinario. Entonces los dígitos a la derecha de dicho punto representan potencias de 1/5. Por ejemplo,

$$0.3 \text{ cinco} = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5};$$

$$0.23 \text{ cinco} = \left(2 \times \frac{1}{5}\right) + \left(3 \times \frac{1}{5^2}\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{25} = \frac{13}{25} = 0.52.$$

EJEMPLO 2: Convertir a base 10 el número 2.34_5.

Solución:

$$\begin{aligned} 2.34_5 &= (2 \times 5^0) + (3 \times 5^{-1}) + (4 \times 5^{-2}) \\ &= (2 \times 1) + \left(3 \times \frac{1}{5}\right) + \left(4 \times \frac{1}{25}\right) \\ &= 2 + \frac{3}{5} + \frac{4}{25} \\ &= 2\,\frac{19}{25} \\ &= 2.76. \end{aligned}$$

Para pasar de base 10 a base 5, se pueden aplicar diversos procedimientos. Consideremos el problema

$$339 = (\quad)_5.$$

Cuando un número se expresa en base 5, se escribe en términos de potencias de 5:

$$5^0 = 1, \quad 5^1 = 5, \quad 5^2 = 25, \quad 5^3 = 125, \quad 5^4 = 625, \quad \ldots.$$

La mayor potencia de 5 que es menor que el número dado es 5^3. Dicha potencia de 5, a saber $5^3 = 125$, puede restarse dos veces de 339. El residuo 89 es positivo y menor que 125.

$$\begin{array}{r} 339 \\ -125 \\ \hline 214 \\ -125 \\ \hline 89 \end{array}$$

Podemos escribir entonces en la conversión de 339 a base 5, 2×5^3.

La siguiente potencia de 5 es 5^2. Este número se puede restar tres veces de 89 y obtenerse un residuo positivo menor que 25.

$$\begin{array}{r} 89 \\ -25 \\ \hline 64 \\ -25 \\ \hline 39 \\ -25 \\ \hline 14 \end{array}$$

Podemos escribir entonces en la conversión 3×5^2.

Finalmente, restamos dos veces el 5 de 14, escribiendo 2×5 en la conversión, obteniéndose 4 como residuo.

$$\begin{array}{r} 14 \\ -5 \\ \hline 9 \\ -5 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 339 &= 2(125) + 3(25) + 2(5) + 4 \\ &= (2 \times 5^3) + (3 \times 5^2) + (2 \times 5^1) + (4 \times 5^0) = 2324_5. \end{aligned}$$

Un grupo de 339 elementos puede considerarse como 2 grupos de 125 elementos, 3 grupos de 25 elementos, 2 grupos de 5 elementos y 4 elementos.

Otro procedimiento para convertir 339 en base 5 consiste en hacer sucesivas divisiones entre 5:

$$\begin{aligned} 339 &= 67 \times 5 + 4 \\ 67 &= 13 \times 5 + 2 \\ 13 &= \ \ 2 \times 5 + 3 \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en sustituir el 13 de la segunda ecuación

por el segundo miembro de la tercera. Después se sustituye el 67 de la primera por el valor obtenido a partir de la segunda en la primera y finalmente se simplifica como sigue:

$$\begin{aligned} 13 &= 2 \times 5 + 3 \\ 67 &= 13 \times 5 + 2 = (2 \times 5 + 3) \times 5 + 2 \\ 339 &= 67 \times 5 + 4 = [(2 \times 5 + 3) \times 5 + 2] \times 5 + 4 \\ &= (2 \times 5^3) + (3 \times 5^2) + (2 \times 5^1) + (4 \times 5^0) = 2324_5 \end{aligned}$$

El proceso aritmético expuesto, puede efectuarse de acuerdo con el siguiente esquema (a veces llamado *algoritmo).*

$$\begin{array}{r|l} 5 & 339 \\ \hline 5 & 67 - 4 \\ 5 & 13 - 2 \\ 5 & 2 - 3 \\ & 0 - 2 \end{array} \uparrow \quad \textit{lease hacia arriba } 2324_5.$$

Obsérvese que se escriben los restos después de cada división por 5. Después se leen los restos en orden inverso a fin de obtener la expresión para el número base 5. Este procedimiento sólo se puede aplicar a números enteros, no a partes fraccionarias de un número.

EJEMPLO 3: Convierta a base 5 el número 423.

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 423 \\ \hline 5 & 84 - 3 \\ 5 & 16 - 4 \\ 5 & 3 - 1 \\ & 0 - 3 \end{array} \uparrow \quad \textit{Resultado: } 3143_5$$

Verificación:

$$\begin{aligned} 3143_5 &= (3 \times 5^3) + (1 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0) \\ &= 375 + 25 + 20 + 3 = 423. \end{aligned}$$

Después de que analicemos las operaciones en otras bases, estaremos en condiciones de aplicar el método de divisiones sucesivas entre la nueva base para hacer conversiones de una base a otra. Por ejemplo, podremos aplicar dicho método para pasar de la base 5 a la base 10 mediante divisiones sucesivas entre 20_5. El cálculo se tendrá que hacer en base 5. Por el momento podemos pasar de la base 5 a la base 10 expresando el número en términos de sus potencias de 5. Como se ha visto en el Ejemplo 2, también se pueden utilizar las potencias de la base aun cuando intervengan partes fraccionarias.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 2-5

Escriba en notación decimal cada uno de los números:

1. 423_5 **2.** 230_5

3. 444_5 **4.** 4230_5

5. 321_5 **6.** 3403_5

7. 1031_5 **8.** 342_5

9. 131.4_5 **10.** 4.23_5

Escriba en base 5 cada uno de los números:

11. 382 **12.** 293

13. 782 **14.** 394

15. 625 **16.** 917

17. 137 **18.** 858

19. 507 **20.** 1000

Amplíe los conceptos de esta sección y escriba cada número en notación decimal:

***21.** 437_8 ***22.** 2013_4

***23.** 1011_2 ***24.** 321_{12}

***25.** 132_{20} ***26.** 312_6

***27.** 214_{15} ***28.** 135.2_8

2-6 OTRAS BASES NUMERICAS

Se ha expuesto el sistema de base 5 simplemente a título de ilus-

tración. Cualquier otro entero positivo mayor que 1 hubiese servido de base tan bien como el 5 para dicho propósito. Para cualquier base N, los dígitos que se utilizan son 0, 1, 2, . . ., $N - 1$, y se emplean potencias de dicha base para los valores posicionales de los dígitos. Considérese, por ejemplo, las siguientes representaciones de los números de 0 al 10 dadas en diferentes bases.

Base 10	*Base 3*	*Base 4*	*Base 5*	*Base 6*	*Base 7*	*Base 8*
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	10_3	3	3	3	3	3
4	11_3	10_4	4	4	4	4
5	12_3	11_4	10_5	5	5	5
6	20_3	12_4	11_5	10_6	6	6
7	21_3	13_4	12_5	11_6	10_7	7
8	22_3	20_4	13_5	12_6	11_7	10_8
9	100_3	21_4	14_5	13_6	12_7	11_8
10	101_3	22_4	20_5	14_6	13_7	12_8

Obsérvese que para cualquier entero positivo N, el símbolo 10_N representa un grupo de N elementos y ningún grupo de un elemento. Así, en la siguiente tabla se ve que:

$$10_3 = (1 \times 3) + (0 \times 1) = 3$$
$$10_4 = (1 \times 4) + (0 \times 1) = 4$$
$$10_5 = (1 \times 5) + (0 \times 1) = 5$$
$$10_6 = (1 \times 6) + (0 \times 1) = 6$$
$$10_7 = (1 \times 7) + (0 \times 1) = 7$$
$$10_8 = (1 \times 8) + (0 \times 1) = 8$$

Para convertir de cualquier base a base 10, exprésese el número en términos de las potencias de su base y simplifíquese, tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1: Convertir a base 10 el número 324_8.

Solución:

$$324_8 = (3 \times 8^2) + (2 \times 8^1) + (4 \times 8^0) = 212.$$

EJEMPLO 2: Convertir a base 10 el número 1231_4.

Solución:

$$1231_4 = (1 \times 4^3) + (2 \times 4^2) + (3 \times 4^1) + (1 \times 4^0) = 109$$

Cualquier número en base 10 puede cambiarse a otra base dividiendo sucesivamente entre la nueva base y utilizando los residuos, como se ha visto en la Sección 2-5. Dicho procedimiento siempre se efectúa calculando en la base dada. Al igual que se ha aplicado para la base 5 se puede aplicar para cualquier otra base.

EJEMPLO 3: Pasar 354 a base 8.

Solución:

```
8 | 354
   8 | 44 — 2
      8 | 5 — 4
          0 — 5
```

Resultado: 542_8.

Verificación:

$$\begin{aligned} 542_8 &= (5 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (2 \times 8^0) \\ &= 320 + 32 + 2 \\ &= 354. \end{aligned}$$

Es posible considerar bases numéricas mayores que 10, pero en esos casos es necesario introducir nuevos símbolos. Consideremos por ejemplo un sistema de numeración en base 12. El símbolo 10_{12} representa $(1 \times 12) + (0 \times 1)$, es decir, 12. Se requieren, por consiguiente, nuevos símbolos para 10 y 11; sean *t* y *e* los símbolos que representan a 10 y 11 respectivamente. Entonces podemos contar en base 12 como sigue:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, t, e, 10_{12}, 11_{12}, 12_{12}, \ldots$$

Se puede convertir a base 10 un número dado en base 12 como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4: Convertir a base 10 el número $2te5_{12}$.

Solución:

$$\begin{aligned} 2te5_{12} &= (2 \times 12^3) + (10 \times 12^2) + (11 \times 12^1) + (5 \times 12^0) \\ &= 3456 + 1440 + 132 + 5 = 5033 \end{aligned}$$

El lector podrá observar que el sistema en base 12 es de uso frecuente al hacer mediciones en el llamado sistema inglés. Por ejemplo, las medidas lineales en términos de pies y pulgadas se basan en unidades de 12. Así por ejemplo, una persona que mida 5 pies 8 pulgadas podría expresar su altura en base 12 como 58_{12}. En forma análoga, el uso de docenas y gruesas se basa en unidades de 12. Así por ejemplo, un pedido de 3 gruesas, 5 docenas y 7 podría escribirse en la forma 357_{12}, teniéndose

$$357_{12} = (3 \times 12^2) + (5 \times 12) + (7 \times 12^0) = 499$$

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 2-6

Cambiar a base 10:

1. 472_8

2. 3213_4

3. 4552_6

4. 347_{12}

5. 1212_3

6. 523_7

7. 472_{12}

8. $3t5_{12}$

9. $15et_{12}$

10. 1101_2

Escribir cada uno de los siguientes números en símbolos de base 12:

11. $(3 \times 12^3) + (5 \times 12^2) + (9 \times 12^1) + (8 \times 12^0)$

12. $(5 \times 12^3) + (10 \times 12^2) + (6 \times 12^1) + (5 \times 12^0)$

13. $(8 \times 12^3) + (7 \times 12^2) + (11 \times 12^1) + (0 \times 12^0)$

14. $(7 \times 12^3) + (11 \times 12^2) + (10 \times 12^1) + (8 \times 12^0)$

Cambiar a la base que se indica:

15. $324 = (\quad)_4$ **16.** $576 = (\quad)_8$

17. $427 = (\quad)_6$ **18.** $114 = (\quad)_3$

19. $798 = (\quad)_5$ **20.** $257 = (\quad)_7$

21. $536 = (\quad)_9$ **22.** $182 = (\quad)_{12}$

23. $247 = (\quad)_{12}$ **24.** $2033 = (\quad)_{12}$

***25.** $283 = (\quad)_{12}$ ***26.** $27 = (\quad)_2$

***27.** $47 = (\quad)_2$ ***28.** $175 = (\quad)_2$

2-7 CALCULO EN NOTACION DE BASE CINCO

Podemos hacer muy fácilmente una tabla para sumar números en base 5. Consideremos, por ejemplo, el problema de sumar $4_5 + 3_5$. Se puede expresar como $4_5 + 1_5 + 2_5$. Ahora bien $(4_5 + 1_5)$ es un grupo de 5, es decir 10_5. Sumamos entonces 2_5 y obtenemos 12_5. Esto es equivalente a

$$(1 \times 5^1) + (2 \times 5^0) = (1 \times 5^1) + (2 \times 1) = 5 + 2 = 7.$$

De un modo similar, $4_5 + 4_5 = 4_5 + 1_5 + 3_5$.

Ahora bien, $(4_5 + 1_5) = 10_5$. Sumamos entonces 3_5 y obtenemos la suma 13_5. Este resultado se podía haber obtenido también agrupando: $4_5 + 4_5$ puede representarse como (****) + (****), que puede reagruparse como (*****) + (***), es decir, 13_5.

A continuación se da la tabla necesaria para sumas en base 5. (Verifíquela.)

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10_5
2	2	3	4	10_5	11_5
3	3	4	10_5	11_5	12_5
4	4	10_5	11_5	12_5	13_5

La tabla puede utilizarse para determinar la suma de números, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1: Determinar la suma de 432_5 y 243_5. Verifíquese después en base 10 el resultado.

Solución:

$$\begin{array}{r} 432_5 \\ +243_5 \\ \hline 1230_5 \end{array}$$

Verificación:

$$\begin{array}{rcll} 432_5 & = & (4 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (2 \times 5^0) & = 117 \\ +243_5 & = & (2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0) & = \underline{73} \\ \hline 1230_5 & = & (1 \times 5^3) + (2 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (0 \times 5^0) & = 190 \end{array}$$

He aquí los pasos efectuados en el Ejemplo 1. Se ha utilizado el símbolo 5 en lugar de 10_{cinco} para facilitar al lector el reconocer la potencia de 5 que interviene en cada caso. Seguiremos con dicha convención a lo largo de este capítulo.

Primero sume la columna de las unidades

$$\begin{array}{r} (4 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (2 \times 5^0) \\ (2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0) \\ \hline 10_5 \end{array}$$

A continuación escriba en la segunda columna la suma 10_5 de la primera columna como 1×5^5, y sume la segunda columna.

$$\begin{array}{r} 1 \times 5^1 \\ (4 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (2 \times 5^0) \\ (2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0) \\ \hline (13_5 \times 5^1) + (0 \times 5^0) \end{array}$$

Después escriba $10_5 \times 5^1$ de la suma anterior en la tercera columna y sume dicha columna.

$$
\begin{array}{r}
1 \times 5^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
(4 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (2 \times 5^0) \\
\underline{(2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0)} \\
(12_5 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (0 \times 5^0) = 1230_5
\end{array}
$$

Obsérvese que al calcular en base 5, "llevamos" grupos de cinco al igual que "llevamos" grupos de diez en el cálculo decimal.

La resta no resulta difícil si se la considera como la operación inversa de la suma. La tabla de sumas en base 5 puede nuevamente servirnos.

EJEMPLO 2: Reste en base 5 y verifique en base 10:

$211_5 - 142_5$.

Solución: Considere 211_5 como

$$(2 \times 5^2) + (1 \times 5^1) + (1 \times 5^0);$$

después como

$$(1 \times 5^2) + (11_5 \times 5^1) + (1 \times 5^0);$$

después como

$$(1 \times 5^2) + (10_5 \times 5^1) + (11_5 \times 5^0).$$

Por consiguiente:

$$
\begin{array}{rcl}
211_5 & = & (1 \times 5^2) + (10_5 \times 5^1) + (11_5 \times 5^0) \\
\underline{-142_5} & = & \underline{(1 \times 5^2) + \quad (4 \times 5^1) + \quad (2 \times 5^0)} \\
14_5 & & \qquad\qquad\quad (1 \times 5^1) + \quad (4 \times 5^0)
\end{array}
$$

Verificación:

$$
\begin{array}{rcr}
211_5 & = & 56 \\
\underline{-142_5} & = & \underline{47} \\
14_5 & = & 9
\end{array}
$$

El problema puede resolverse pensando y "pidiendo prestado" en base 5. Siga los pasos siguientes:

$$
\text{(a)}\ \begin{array}{r} 211_5 \\ \underline{-142_5} \end{array}
\qquad
\text{(b)}\ \begin{array}{r} 20{}^{1}1_5 \\ \underline{-14\ 2_5} \\ 4_5 \end{array}
\qquad
\text{(c)}\ \begin{array}{r} 1{}^{1}0{}^{1}1_5 \\ \underline{-1\ 4\ 2_5} \\ 1\ 4_5 \end{array}
$$

Cada uno de esos índices "1" puede interpretarse en el sentido de

que el número 211_5 no ha cambiado sino que ha sido expresado en diferentes formas, a saber:

$$211_5 = (2 \times 5^2) + (1 \times 5^1) + (1 \times 5^0)$$
$$20^11_5 = (2 \times 5^2) + (0 \times 5^1) + (1 \times 5^1) + (1 \times 5^0) = 211_5$$
$$1^10^11_5 = (1 \times 5^2) + (1 \times 5^2) + (0 \times 5^1) + (1 \times 5^1) + (1 \times 5^0) = 211_5$$

Las multiplicaciones pueden efectuarse ya sea como una repetición de sumas o efectuarlas como en base 10.

EJEMPLO 3: Determinar el producto de 243_5 y 4_5.

Solución: Necesitamos los siguientes datos:

$$4 \times 3 = 12_{10} = (2 \times 5^1) + (2 \times 5^0) = 22_5$$
$$4 \times 4 = 16_{10} = (3 \times 5^1) + (1 \times 5^0) = 31_5$$
$$4 \times 2 = 8_{10} = (1 \times 5^1) + (3 \times 5^0) = 13_5$$

El modelo para el cálculo de multiplicaciones y "acarreos" en base 5 es ahora exactamente el mismo que el del cálculo en base 10. Por ejemplo, los productos parciales se van corriendo un lugar para representar las potencias de 5 que corresponden. En la primera forma que se expone no se ha intentado hacer "acarreos" mentales.

$$\begin{array}{r} 243_5 \\ \underline{\times 4_5} \\ 22_5 \\ 31_5 \\ \underline{13_5} \\ 2132_5 \end{array} \qquad \textit{forma condensada} \qquad \begin{array}{r} 243_5 \\ \underline{\times 4_5} \\ 2132_5 \end{array}$$

La multiplicación por un factor de más de un dígito también es posible en otras bases. En estos casos también, la forma de calcu-

lar es semejante a la utilizada en base 10. Consideremos, por ejemplo, el producto $34_5 \times 243_5$:

$$
\begin{array}{rl}
243_5 & \\
\underline{34_5} & \\
2132 & = 4_5 \times 243_5 \\
\underline{13340} & = 30_5 \times 243_5 \\
21022_5 &
\end{array}
$$

Como en el cálculo en base 10, al verificar el producto de $30_5 \times 243_5$ puede prescindirse del 0 final puesto que el valor posicional se tiene en cuenta corriendo el producto un lugar hacia adentro.

El método que se utiliza al dividir en base 10 puede también aplicarse en la división en base 5. Consideremos, por ejemplo, el problema de dividir $12_5 \div 4_5$. Como primer paso es conveniente hacer una tabla de múltiplos de 4_5 en base 5:

$$
\begin{aligned}
1_5 \times 4_5 &= 4_5 \\
2_5 \times 4_5 &= 13_5 \\
3_5 \times 4_5 &= 22_5 \\
4_5 \times 4_5 &= 31_5
\end{aligned}
$$

Dado que 12_5 es mayor que 4_5 y menor que 13_5, el primer número del cociente es 1.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\cline{2-2}
4_5 & 121_5 \\
 & \underline{4} \\
 & 31
\end{array}
$$

Como en el cálculo en base 10, multiplicamos $1_5 \times 4_5$ y restamos el producto de 12_5 en el dividendo. Se baja entonces el siguiente dígito. Obsérvese que $12_5 = 7$ y por consiguiente $12_5 - 4 = 3$.

Ahora tenemos que dividir 31_5 entre 4_5. Obsérvese que $4_5 \times 4_5 = 31_5$. Podemos entonces concluir la división sin resto.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 14_5 \\
\cline{2-2}
4_5 & 121_5 \\
 & \underline{4} \\
 & 31 \\
 & \underline{31}
\end{array}
\qquad
\textit{Verificación:}\quad
\begin{array}{r}
14_5 \\
\underline{\times 4_5} \\
121_5
\end{array}
$$

EJEMPLO 4: Dividir 232_5 entre 3_5; verifíquese el resultado multiplicando en base 5.

Solución:

$$1_5 \times 3_5 = 3_5$$
$$2_5 \times 3_5 = 11_5$$
$$3_5 \times 3_5 = 14_5$$
$$4_5 \times 3_5 = 22_5$$

$$\begin{array}{r} 42_5 \\ 3_5\overline{)232_5} \\ \underline{22} \\ 12 \\ \underline{11} \\ 1 \end{array}$$

Verificación:
$$\begin{array}{r} 42_5 \\ \underline{\times 3_5} \\ 231_5 \\ \underline{+1_5} \\ 232_5 \end{array}$$

El cociente es 42_5 y el resto 1_5. Obsérvese que en la comprobación se multiplica el cociente por el divisor, se suma el resto y se obtiene el dividendo.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 2-7

Súmese en base 5 y verifíquese en base 10:

1. $32_5 + 24_5$

2. $24_5 + 34_5$

3. $143_5 + 234_5$

4. $432_5 + 443_5$

5. $2341_5 + 3421_5$

6. $4324_5 + 1442_5$

Réstese en base 5 y verifíquese en base 10:

7. $143_5 - 31_5$

8. $43_5 - 24_5$

9. $312_5 - 123_5$

10. $421_5 - 234_5$

11. $1321_5 - 403_5$

12. $3204_5 - 1342_5$

13. $\begin{array}{r} 400_5 \\ -123_5 \\ \hline \end{array}$

***14.** $\begin{array}{r} 2003_5 \\ -1344_5 \\ \hline \end{array}$

Multiplíquese en base 5 y verifíquese en base 10:

15. $\begin{array}{r} 342_5 \\ \times 4_5 \\ \hline \end{array}$

16. $\begin{array}{r} 243_5 \\ \times 3_5 \\ \hline \end{array}$

17. $\begin{array}{r} 1423_5 \\ \times\ 2_5 \\ \hline \end{array}$

18. $\begin{array}{r} 2304_5 \\ \times\ 3_5 \\ \hline \end{array}$

19. $\begin{array}{r} 24_5 \\ \times 32_5 \\ \hline \end{array}$

20. $\begin{array}{r} 32_5 \\ \times 43_5 \\ \hline \end{array}$

21. $\begin{array}{r} 243_5 \\ \times 34_5 \\ \hline \end{array}$

***22.** $\begin{array}{r} 3243_5 \\ \times 324_5 \\ \hline \end{array}$

Divídase en base 5 y verifíquese en base 10:

23. $4_5\overline{)143_5}$

24. $3_5\overline{)121_5}$

25. $3_5\overline{)1234_5}$

26. $4_5\overline{)3042_5}$

27. $11_5\overline{)143_5}$

28. $32_5\overline{)3031_5}$

29. $23_5\overline{)2043_5}$

30. $41_5\overline{)43201_5}$

31. Hágase una tabla de multiplicar en base 5.

***32.** Complete las siguientes tablas para suma y multiplicación en base 4:

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

x	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

***33.** Complétense las siguientes tablas de suma y multiplicación en base 8:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

x	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

***34.** Utilizando *t* para 10 y *e* para 11, complétense las siguientes tablas de suma y multiplicación en base 12:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*t*	*e*
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
t												
e												

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*t*	*e*
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
t												
e												

Efectúe cada una de las siguientes operaciones:

***35.** $2453_6 + 3425_6$

***36.** $13201_4 + 12323_4$

***37.** $374_8 - 146_8$

***38.** $5206_7 - 2354_7$

***39.** $256_8 \times 45_8$

***40.** $1302_4 \times 213_4$

***41.** $3_4 \overline{)1231_4}$

***42.** $25_6 \overline{)3245_6}$

2-8 SISTEMA BINARIO

Los números expresados en base 2 son de particular interés dada su aplicación en las modernas computadoras electrónicas. Este sistema de notación recibe el nombre de **sistema binario** y sólo emplea dos dígitos, el 0 y el 1.

Recientemente un vehículo espacial tomó fotografías del planeta Marte retrasmitiendo los datos a la Tierra en sistema binario. En la Tierra, con la ayuda de computadoras, dichos datos se trans-

formaron en fotografías de la superficie del planeta que aparecieron en muchos periódicos.

Si bien existen evidencias de que los chinos, alrededor del año 2000 A. C., ya conocían los conceptos básicos del sistema binario, no es sino hasta hace pocos años que dicho sistema se ha aplicado ampliamente en la computación electrónica, resolviéndose con él problemas de archivo, cálculos matemáticos e infinidad de otras cuestiones. Los siguientes son algunos de los valores posicionales del sistema binario:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1

Así, como se muestra en el siguiente ejemplo, en notación binaria $11011101_2 = 221$.

EJEMPLO 1: Convertir a base 10, 11011101_2.

Solución:

$$\begin{aligned} 11011101_2 &= (1 \times 2^7) + (1 \times 2^6) + (0 \times 2^5) + (1 \times 2^4) \\ &\quad + (1 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) \\ &= 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 1 \\ &= 221. \end{aligned}$$

A continuación se dan los 16 primeros números expresados en notación binaria:

Base 10	*Base 2*	*Base 10*	*Base 2*
1	1	9	1001_2
2	10_2	10	1010_2
3	11_2	11	1011_2
4	100_2	12	1100_2
5	101_2	13	1101_2
6	110_2	14	1110_2
7	111_2	15	1111_2
8	1000_2	16	10000_2

Como puede verse, las tablas para la suma y la multiplicación en sistema binario se pueden deducir fácilmente.

+	0	1
0	0	1
1	1	10_2

x	0	1
0	0	0
1	0	1

EJEMPLO 2: Multiplicar $101_2 \times 1101_2$.

Solución:

$$\begin{array}{r} 1101_2 \\ 101_2 \\ \hline 1101 \\ 11010 \\ \hline 1000001_2 \end{array}$$

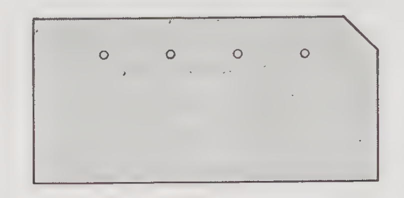
Verificación:

$$\begin{aligned} 1101_2 &= 13 \\ 101_2 &= \underline{5} \\ & 65 \\ 1000001_2 &= (1 \times 2^6) + (1 \times 2^0) \\ &= 64 + 1 \\ &= 65. \end{aligned}$$

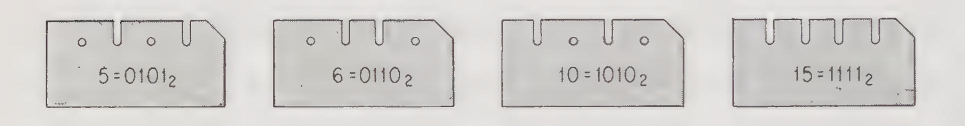
Existe un código, el ASCII (siglas de American Standard Code for Information Interchange), que se adoptó en 1967 y se emplea para representar todas las letras del alfabeto, los números y otros símbolos por medio del sistema binario. Así por ejemplo, el número 1 00000 1 representa a la letra A cuando ésta se envía por teletipo a una computadora.

Los números en sistema binario pueden representarse por medio de focos eléctricos encendidos y apagados. Si el foco está encendido representa al dígito 1, en tanto que si está apagado representa al dígito 0. En forma semejante, los dígitos 0 y 1 pueden utilizarse en operaciones de archivo de tarjetas. Para mayor comprensión del procedimiento, recomendamos al lector que haga su propio pequeño conjunto de tarjetas perforadas. Prepare primero

un conjunto de dieciséis tarjetas con cuatro perforaciones cada una y una esquina cortada, tal como se muestra en la figura.



Ahora represente los números del 0 al 15 en notación binaria. Para ello, corte la porción superior de cada perforación para representar al 1; deje la perforación para representar al 0. He aquí algunos ejemplos de cómo quedarían.



Una vez efectuada la operación con todas las tarjetas, barájelas cuidadosamente y luego agrúpelas teniendo cuidado de que todas las esquinas cortadas coincidan. Ahora, empezando de derecha a izquierda efectúe la siguiente operación. Introduzca una aguja en la primera perforación y tire hacia arriba. Algunas tarjetas saldrán del montón: aquellas cuya primera perforación no se ha cortado totalmente hasta la arista de la tarjeta (es decir, las tarjetas que representan números cuyo primer dígito en notación binaria es un 0).

Coloque las tarjetas que han salido delante del montón y repita la misma operación para las perforaciones restantes, procediendo en el mismo orden de derecha a izquierda. Cuando termine, las tarjetas estarán ordenadas de 0 a 15.

Obsérvese que sólo se requieren cuatro operaciones para ordenar las dieciséis tarjetas. A medida que el número de tarjetas se duplica, sólo se requiere una operación más cada vez, para ordenarlas. Es decir, 32 tarjetas pueden ordenarse numéricamente con cinco operaciones como la descrita; 64 tarjetas pueden ordenarse con seis operaciones; 128 tarjetas con siete operaciones, y así sucesivamente. De esta forma un número lo suficientemente grande de tarjetas pueden ordenarse con un número relativamente pequeño

de operaciones. Por ejemplo, más de mil millones de tarjetas pueden ordenarse numéricamente con sólo treinta operaciones.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 2-8

Escribir los siguientes números en notación binaria:

1. 28 **2.** 45
3. 19 **4.** 128
5. 152 **6.** 325

Pasar los siguientes números a notación decimal:

7. 1111_2 **8.** 10101_2
9. 110111_2 **10.** 101010_2
11. 100110_2 **12.** 11011011_2

Efectuar la operación indicada en sistema binario y verificarla en base 10:

13. $1101_2 + 1011_2$ **14.** $10011_2 + 10101_2$

15. $11011_2 - 10110_2$ **16.** $110101_2 - 10111_2$

17. $1101_2 \times 11_2$ **18.** $10110_2 \times 101_2$

19. En el código ASCII, los números para *B, D* y *G* son 66, 68 y 71, respectivamente. Determinar la representación binaria de **(a)** *B;* **(b)** *D;* **(c)** *G.*

20. En el código ASCII, las mayúsculas *A, B, C,...*, en orden alfabético tienen asignados los números 65, 66, 67,... ¿Cuál es la palabra transmitida por el código 1010010, 1010101, 1001110?

*21. Escribir el número 214 en base 8 y después en base 2. ¿Puede establecer la relación entre estas dos bases?

*22. Haga un conjunto de 32 tarjetas perforadas para representar los números del 0 al 31. En este caso, cada tarjeta requiere cinco perforaciones y son necesarias cinco operaciones para ordenar numéricamente el conjunto de tarjetas.

2-9 PARA DIVERTIRSE

Muchos aspectos divertidos están basados en el sistema binario. Consideremos, por ejemplo, las tablas que a continuación se exponen, dentro de las cuales se disponen los números del 1 al 15 de acuerdo al siguiente esquema.

D	*C*	*B*	*A*
8	4	2	1
9	5	3	3
10	6	6	5
11	7	7	7
12	12	10	9
13	13	11	11
14	14	14	13
15	15	15	15

En la tabla *A* se colocan todos los números en cuya representación binaria aparece un 1 en el lugar de las unidades. En la tabla *B* se colocan todos los números en cuya representación binaria aparece un 1 en el segundo lugar a partir de la derecha. En las tablas *C* y *D* se colocan los números con un 1 en la tercera y en la cuarta posición, respectivamente.

Ahora dígale a alguien que piense en un número y que le diga en qué tabla o tablas se encuentra. Entonces usted puede decirle en qué números pensó sumando los primeros números de las tablas que ha mencionado. Así por ejemplo, si el número en que pensó es el 11, le mencionará las tablas *A*, *B* y *D*. Sumando entonces $1 + 2 + 8$ se determina el número en cuestión.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 2-9

1. Explique por qué se puede determinar un número después de conocer las tablas en la que se encuentra, según el método expuesto en la Seción 2-9.

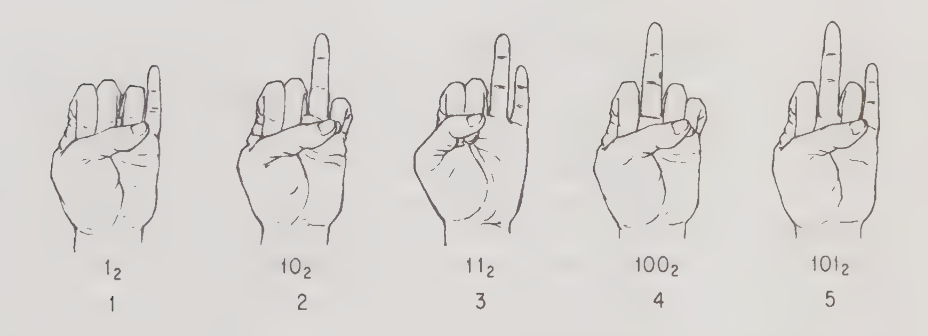
2. Amplíe las tablas de la sección 2-9 a fin de incluir todos los números hasta el 31. (Será necesaria una quinta tabla *E*). Explique ahora para el conjunto de las cinco tablas cómo se puede determinar un número sabiendo en qué tabla aparece.

3. Se puede aplicar el sistema binario para identificar uno cualquiera de ocho números por medio de tres preguntas que pueden contestarse por "sí" o "no". Consideremos, por ejemplo, los números del 0 al 7 escritos en sistema binario. Los valores posicionales quedan indicados por las columnas *A, B* y *C*.

	C	*B*	*A*
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Las tres preguntas que hay que hacer son las siguientes: "¿Tiene el número un 1 en la posición *A*?" "¿Tiene el número un 1 en la posición *B*?" "¿Tiene el número un 1 en la posición *C*?" Supongamos que las respuestas son: "Sí, No, Sí". Entonces el número se identifica como 101_2; es decir, 5. Amplíese este procedimiento para ver cómo se puede adivinar un número comprendido entre 0 y 15 por medio de cuatro preguntas.

4. Se puede contar en base 2 con los dedos de las manos considerando que un dedo levantado es 1 y doblado 0. A continuación se muestran las representaciones para los cinco primeros números



Haga ver cómo se cuenta en sistema binario hasta 31 utilizando los dedos de una sola mano.

*5. Busque una referencia al juego de Nim y estudie su relación con el sistema binario.

EXAMEN RELATIVO AL CAPITULO 2

1. Aplique el método egipcio de duplicación y mediación para determinar el producto de 17×31

2. Multiplicar 325×437 aplicando el método de "galeras".

3. Escribir 234.57 en notación desarrollada.

4. Escribir el número 58 en: **(a)** base 8; **(b)** base 5.

5. Pasar a base 10:

   (a) 234_5 **(b)** 125_6

6. Pasar a base 10:

   (a) $3te_{12}$ **(b)** 1011_2

7. Pasar a la base que se indica:

   (a) $243 = (\quad)_5$ **(b)** $47 = (\quad)_4$

8. Calcular en base 5:

   (a) $\begin{array}{r} 243_5 \\ +132_5 \\ \hline \end{array}$ **(b)** $\begin{array}{r} 3021_5 \\ -1314_5 \\ \hline \end{array}$

9. Calcular en base 5:

   (a) $\begin{array}{r} 1342_5 \\ \times\ 3_5 \\ \hline \end{array}$ **(b)** $4_5\overline{)3212_5}$

10. Calcular en sistema binario:

   (a) $\begin{array}{r} 1111_2 \\ +1101_2 \\ \hline \end{array}$ **(b)** $\begin{array}{r} 1011_2 \\ \times 11_2 \\ \hline \end{array}$

Capítulo 3

SISTEMAS MATEMATICOS

En el capítulo anterior hemos analizado varios sistemas de numeración, así como las operaciones con los elementos de cada uno de esos sistemas. Gran parte de la matemática se dedica al estudio de principios básicos. Este capítulo lo dedicaremos a investigar algunos de esos principios básicos, estudiando diversos sistemas abstractos que, no dudamos, resultarán interesantes.

Un **sistema matemático** consiste en un conjunto de elementos (tal como el conjunto de los enteros), una o más operaciones sobre dichos elementos (tales como la suma, resta, multiplicación y división), una o más relaciones (tal como la igualdad $2 \times 3 = 6$) y algunos axiomas (reglas) que satisfacen los elementos del conjunto, las operaciones y las relaciones. Por ejemplo, damos por supuesto que todo sistema consta de una relación de igualdad y del

axioma que implica que $a = a$, es decir, todo elemento es igual a sí mismo. De hecho, desde que inició sus estudios, el lector ha estado trabajando siempre con sistemas matemáticos. Iniciaremos el capítulo con el estudio de un sistema matemático específico y relacionaremos las propiedades de dicho sistema a las de ciertos conjuntos conocidos de números.

3-1 UN SISTEMA ABSTRACTO

Definamos un sistema abstracto compuesto del siguiente conjunto de elementos:

$$\{*, \#, \Sigma, [\quad]\}$$

Para facilitar la notación designaremos con Y a dicho conjunto, es decir,

$$Y = \{*, \#, \Sigma, [\quad]\}.$$

Ahora definamos una operación a la que llamaremos "multición" y que representaremos con el símbolo $\sim$. La operación se define por medio de la siguiente tabla:

~	*	#	Σ	[ ]
*	*	#	Σ	[ ]
#	#	Σ	[ ]	*
Σ	Σ	[ ]	*	#
[ ]	[ ]	*	#	Σ

La operación $\sim$ es una **operación binaria** puesto que asocia a un solo elemento cada *dos* elementos cualesquiera del conjunto dado.

Para "multiciar" dos elementos de Y procedemos del mismo modo que con una tabla de multiplicar común y corriente. Determinamos el primero de los elementos en el encabezado de las columnas y el segundo en el de los renglones, leyéndose el resultado en la intersección de la columna y del renglón dentro de la tabla. Verifique en la tabla cada una de las siguientes igualdades:

$$\# \sim \Sigma = [\quad]$$
$$[\quad] \sim \# = *$$
$$\Sigma \sim * = \Sigma$$

Ahora lo más importante es investigar las propiedades básicas de ese sistema. Las siguientes son algunas de las más importantes.

1. Cuando dos elementos cualesquiera del conjunto Y se combinan por el proceso de "multición", el resultado es un único elemento de la colección de elementos de Y. En otras palabras, existe uno y sólo un resultado cuando se "multifican" dos elementos de Y, y dicho resultado es siempre uno de los elementos de Y. Decimos entonces que *el conjunto Y es cerrado bajo la operación de "multición"*.

En general se dice que un conjunto S es **cerrado** bajo una operación binaria dada si dicha operación asocia un único elemento del conjunto S a dos elementos cualesquiera del conjunto.

Consideremos, de la aritmética elemental, todos los números que utilizamos para contar:

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

A dicha colección de elementos le damos el nombre de conjunto de los **números naturales** y utilizamos los puntos suspensivos para indicar que no podemos enumerar todos los elementos del conjunto, es decir, que C es un **conjunto infinito.**

El conjunto de los números naturales es cerrado bajo las operaciones de suma y multiplicación. Es decir, la suma de dos números naturales cualesquiera es a su vez un número natural y el producto de dos números naturales cualesquiera es también un número natural. ¿El conjunto de los números naturales es cerrado bajo la resta? Es decir, ¿la diferencia de dos números naturales **cualesquiera** es siempre un número natural?

2. Consideremos el orden en que se combinan dos elementos cualesquiera del conjunto Y. ¿Son iguales $\# \sim \Sigma$ y $\Sigma \sim \#$? ¿Es correcta la igualdad $[\ ] \sim * = * \sim [\ ]$? En general si a y b representan a dos elementos cualesquiera del conjunto Y, ¿es válida la igualdad $a \sim b = b \sim a$? Al determinar que dichas igualdades son válidas, podemos resumir esa propiedad diciendo que *los elementos del conjunto Y satisfacen la propiedad conmutativa para la "multición"*.

En general se dice que un conjunto de elementos satisfacen la **propiedad conmutativa** para una operación, si el resultado que se obtiene al combinar dos elementos cualesquiera del conjunto bajo dicha operación no depende del orden en que se combinen dichos elementos.

El conjunto de los números naturales es conmutativo bajo la suma y la multiplicación. Es decir, la suma de dos números natu-

rales cualesquiera es la misma, independientemente del orden en que se sumen los elementos. Así, por ejemplo, $5 + 7 = 7 + 5$, $8 + 3 = 3 + 8$, etc. Por lo mismo, el conjunto de los números naturales satisface la propiedad conmutativa para la multiplicación dado que el producto de dos números naturales cualesquiera es el mismo, independientemente del orden en que se multipliquen sus elementos. Así, por ejemplo, $5 \times 7 = 7 \times 5$, $8 \times 3, = 3 \times 8$, etcétera.

EJEMPLO 1: Demostrar que la resta de números naturales no es conmutativa.

Solución: Es suficiente un solo **contra ejemplo** para demostrar que la propiedad no es válida. Dado que $7 - 3 = 4$ y $3 - 7 = -4$, $7 - 3 \neq 3 - 7$ la resta no es conmutativa. (El símbolo $\neq$ se lee "no es igual a".)

3. Combinemos ahora tres elementos del conjunto *Y*. ¿Puede usted determinar el resultado de Σ ∼ [ ] ∼ # ? Aquí vemos que se nos presentan dos posibilidades. Podemos primero combinar Σ y [ ] y después combinar el resultado con #, o bien podemos combinar primero [ ] y # y después combinar Σ con el resultado obtenido. Consideremos ambas posibilidades:

$$(\Sigma \sim [\quad]) \sim \# = \# \sim \# = \Sigma$$
$$\Sigma \sim ([\quad] \sim \#) = \Sigma \sim * = \Sigma$$

En ambos casos se obtiene el mismo resultado y ello independientemente de los tres elementos que se elijan del conjunto *Y*. Esta propiedad recibe el nombre de **propiedad asociativa** para la "multición", representándose simbólicamente:

$$a \sim (b \sim c) = (a \sim b) \sim c$$

donde a, b y c representan elementos cualesquiera del conjunto *Y*.

El conjunto de los números naturales es asociativo respecto de la suma y de la multiplicación. Es decir, la suma o el producto de tres números naturales cualesquiera tiene el mismo resultado independientemente del orden en que se asocien los elementos. Por ejemplo,

$3 + (5 + 7) = 3 + 12 = 15$ y $(3 + 5) + 7 = 8 + 7 = 15$;
$3 \times (5 \times 7) = 3 \times 35 = 105$ y $(3 \times 5) \times 7 = 15 \times 7 = 105$.

Por consiguiente

$$3 + (5 + 7) = (3 + 5) + 7 \quad \text{y} \quad 3 \times (5 \times 7) = (3 \times 5) \times 7.$$

EJEMPLO 2: Demostrar que el conjunto de los números naturales no es asociativo respecto de la división.

Solución: Nuevamente basta con un contra ejemplo.
$24 \div (6 \div 2) = 24 \div 3 = 8$,
en tanto que $(24 \div 6) \div 2 = 4 \div 2 = 2$.
Por consiguiente $24 \div (6 \div 2) \neq (24 \div 6) \div 2$, no siendo asociativa la división de números naturales.

---

4. El conjunto *Y* contiene un único elemento, *, que no altera a ningún otro elemento con respecto a la "multición". Por ejemplo:

$* \sim * = *$, $\# \sim * = \#$, $\Sigma \sim * = \Sigma$, y $[\ \ ] \sim * = [\ \ ]$.

El elemento con esta propiedad recibe el nombre de **elemento idéntico** para la "multición".

¿Cuál es, en la aritmética clásica, el elemento idéntico para la suma? Es decir, ¿qué podemos sumar a 7 para obtener 7? ¿9 + 0 es 9? ¿Se ve que el 0 es el elemento idéntico para la suma? Sin embargo, 0 no es un elemento del conjunto de los números naturales Por consiguiente, podemos decir que el conjunto de los números naturales no contiene un elemento idéntico respecto de la suma. ¿Contiene el conjunto de los números naturales un elemento idéntico respecto de la multiplicación?

5. Examinemos una propiedad más del conjunto *Y*. En cada uno de los siguientes casos, coloque en el espacio en blanco un elemento del conjunto *Y* de forma que se obtenga un enunciado correcto:

$* \sim$ ____ $= *$
$\# \sim$ ____ $= *$
$\Sigma \sim$ ____ $= *$
$[\ \ ] \sim$ ____ $= *$

Las respuestas correctas son, respectivamente, *, [ ], Σ y #. Se determina así que, para cada elemento del conjunto Y existe otro elemento de Y tal que "multiciados" los dos, determinan el elemento idéntico *. Cada uno de los elementos utilizados en los enunciados recibe el nombre de **inverso respecto de la multición** (o simplemente **inverso**) del primer elemento. Así, el inverso de * es *, el inverso de # es [ ], el inverso de Σ es Σ y el inverso de [ ] es #. Obsérvese que * y Σ son a la vez sus propios inversos.

El conjunto de los números naturales no contiene los inversos de sus elementos respecto de la suma o de la multiplicación. Sin embargo, al ampliar nuestro sistema a fin de incluir a *todos* los enteros, entonces cada elemento tiene un inverso bajo la adición. Así, por ejemplo, el inverso de 5 es —5, dado que $5 + (-5) = 0$. De igual modo, el inverso de —3 es 3, dado que $(-3) + 3 = 0$.
En posteriores ampliaciones de nuestro sistema numérico se consideran todas las fracciones de la forma a/b, siendo a y b enteros y $b \neq 0$. Este conjunto contiene entonces los inversos para cada uno de sus elementos diferentes de cero respecto de la multiplicación. Así por ejemplo, el inverso de 5 es 1/5, dado que $5 \times 1/5 = 1$. Por lo mismo, el inverso de 2/3 es 3/2, dado que $2/3 \times 3/2 = 1$.
Resumiendo, el conjunto Y:

1. Es cerrado con respecto a la "multición".
2. Es conmutativo con respecto a la "multición".
3. Es asociativo con respecto a la "multición".
4. Contiene un elemento idéntico con respecto a la "multición".
5. Contiene un inverso para cada uno de sus elementos con respecto a la "multición".

Podemos condensar estas cinco propiedades diciendo que los elementos del conjunto Y forman un **grupo conmutativo** bajo la "multición".

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 3-1

Determine en la tabla que se ha dado en esta sección el resultado de cada una de las siguientes operaciones:

1. # ~ * **2.** * ~ Σ

3. [ ] ~ [ ] **4.** Σ ~ #

Verifique que cada una de las siguientes igualdades es válida y enuncie el nombre de la propiedad que cada una de ellas ilustra:

5. Σ ∼ # = # ∼ Σ

6. [ ] ∼ (# ∼ Σ) = ([ ] ∼ #) ∼ Σ

7. # ∼ * = #

8. # ∼ [ ] = *

9. (# ∼ Σ) ∼ * = # ∼ (Σ ∼ *)

10. [ ] ∼ * = [ ]

11. [ ] ∼ # = *

12. [ ] ∼ * = * ∼ [ ]

Resuelva los Ejercicios del 13 al 21 mediante la siguiente tabla que define una operación ⊙ para los elementos del conjunto {△, □, Q}:

⊙	△	□	Q
△	Q	△	□
□	△	□	Q
Q	□	Q	△

13. Determinar △ ⊙ □.

14. Determinar Q ⊙ △.

15. ¿Es válida la igualdad Q ⊙ □ = □ ⊙ Q?

16. ¿Es válida la igualdad △ ⊙ Q = Q ⊙ △?

17. ¿Es válida la igualdad (Q ⊙ □) ⊙ △ = Q ⊙ (□ ⊙ △)?

18. ¿Es válida la igualdad □ ⊙ (Q ⊙ △) = (□ ⊙ Q) ⊙ △?

19. ¿Una respuesta afirmativa en los dos últimos ejercicios, demuestra que el conjunto satisface la propiedad asociativa con respecto a ⊙? Explique su respuesta.

20. ¿Existe un elemento idéntico para ⊙? De ser así, ¿cuál es?

21. ¿Tiene cada elemento su inverso con respecto a ⊙ ? De ser así, nombre el inverso de cada elemento.

22. Resuma las propiedades del conjunto {△, □, Q} con respecto a la operación ⊙.

Resuelva los Ejercicios del 23 al 26 mediante la siguiente tabla que define una operación ⧄ para el conjunto { ·, [, !, $ }*:*

∅	∘	[	!	$
∘	∘	[	!	$
[	[	!	∘	~
!	!	∘	~	[
$	$	[	!	∘

23. ¿Es un conjunto cerrado con respecto de ⧄? Justifique su respuesta.

24. ¿Satisface el conjunto la propiedad conmutativa para ⧄? Dé una explicación.

26. ¿Cuáles elementos del conjunto tienen inversos con respecto a ⧄? Nombre cada uno de esos inversos.

25. ¿Existe en el conjunto un elemento idéntico para ⧄? De ser así, ¿cuál es?

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 3-1

En cada uno de los Ejercicios del 1 al 6, trate de descubrir el significado de la operación # a partir de los ejemplos dados. (En cada caso tiene un significado diferente.)

1. 3 # 4 = 7; 2 # 0 = 2; 5 # 1 = 6; 2 # 2 = 4.

2. 2 # 4 = 3; 5 # 7 = 6; 8 # 10 = 9; 0 # 2 = 1.

3. 5 # 3 = 9; 2 # 4 = 7; 0 # 3 = 4; 1 # 5 = 7.

4. 2 # 3 = 7; 3 # 4 = 13; 1 # 5 = 6; 0 # 3 = 1.

***5.** 3 # 4 = 2; 4 # 3 = 5; 5 # 1 = 9; 1 # 1 = 1.

***6.** $3 \# 5 = 2$; $4 \# 5 = 1$; $2 \# 8 = 0$; $1 \# 6 = 3$.

7. Demostrar que el conjunto de los números naturales no es conmutativo respecto de la división.

8. Demostrar que el conjunto de los números naturales no es asociativo respecto de la sustracción.

9. ¿Cuál es el elemento idéntico respecto de la multiplicación en el conjunto de los números naturales? Dé diversos ejemplos que justifiquen su respuesta.

10. Demostrar que el conjunto de los números naturales no forma un grupo bajo la adición.

11. Supongamos que # significa: "Si los dos números dados son iguales, seleccione el número; si son desiguales, seleccione el menor". Así por ejemplo, $5 \# 5 = 5$ y $5 \# 3 = 3$. Determinar si para el conjunto de los números naturales, $a \# b = b \# a$ y $a \# (b \# c) = (a \# b) \# c$.

12. Supongamos que $ significa: "Seleccione el primero de dos números dados". Así, $5 \$ 2 = 5$. Determinar si para el conjunto de los números naturales $a \$ b = b \$ a$ y $a \$ (b \$ c) = (a \$ b) \$ c$.

***13.** Aplicando las definiciones dadas en los Ejercicios 11 y 12, demostrar que $a \$ (b \# c) = (a \$ b) \# (a \$ c)$ para todo número natural a, b y c.

***14.** Aplicando las definiciones dadas en los Ejercicios 11 y 12, determinar si $a \# (b \$ c) = (a \# b) \$ (a \# c)$.

3-2 LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Vea si puede descubrir el significado de las operaciones # y ⓧ a partir de los siguientes ejemplos:

$5 \# 3 = 3$	$8 \otimes 3 = 8$
$2 \# 8 = 2$	$0 \otimes 3 = 0$
$3 \# 7 = 3$	$6 \otimes 1 = 6$
$4 \# 4 = 4$	$3 \otimes 3 = 3$

Se habrán descubierto los siguientes significados de # y ⓧ:

#: Seleccionar el menor de los dos números si los números son diferentes; seleccionar el número si ambos son iguales.

ⓧ: Seleccionar el primero de los dos números.

Así, $5 \# 9 = 5$ dado que 5 es menor que 9, en tanto que $5 \otimes 9 = 5$ dado que 5 es el primer número de los dos números dados en la expresión. Obsérvese que si los dos números fuesen iguales, enonces $4 \# 4 = 4$.

Podemos también combinar ambas operaciones y determinar el significado de expresiones tales como

$$a \# (b \otimes c) \quad \text{y} \quad (a \# b) \otimes (a \# c),$$

donde a, b y c representan números cualesquiera de la aritmética clásica. Por ejemplo, consideremos $a = 3$, $b = 5$ y $c = 1$; entonces en la primera expresión se tiene

$$3 \# (5 \otimes 1) = 3 \# 5 = 3.$$

Utilizando los mismos valores en la segunda expresión, se tiene

$$(3 \# 5) \otimes (3 \# 1) = 3 \otimes 1 = 3.$$

Determinamos por consiguiente que

$$3 \# (5 \otimes 1) = (3 \# 5) \otimes (3 \# 1).$$

En general podemos escribir

$$a \# (b \otimes c) = (a \# b) \otimes (a \# c)$$

para todos los valores posibles de a, b y c. Enunciamos, formalmente, que $\#$ es **distributiva** con respecto a $\otimes$. Esta propiedad, conocida como la **propiedad distributiva**, resultará más fácil de visualizar con ejemplos aritméticos.

Consideremos, por ejemplo, la expresión $3(5 + 8)$. Según la propiedad distributiva, podemos calcular dicha expresión de dos formas diferentes, cada una de las cuales determina el mismo resultado. En efecto,

$$3(5 + 8) = 3(13) = 39,$$
$$(3)(5) + (3)(8) = 15 + 24 = 39,$$

y por lo tanto

$$3(5 + 8) = (3)(5) + (3)(8).$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que la propiedad distributiva nos permite ya sea sumar primero y multiplicar después o bien determinar primero los dos productos y sumar después. En general se dice que para todos los posibles valores de a, b y c

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Formalmente esto se conoce como la **propiedad distributiva para la multiplicación con respecto a la adición,** o simplemente la *propiedad distributiva.* Obsérvese que la adición *no* es distributiva respecto a la multiplicación dado que, por ejemplo,

$$3 + (5 \times 8) \neq (3 + 5) \times (3 + 8);$$

es decir, $3 + 40 \neq 8 \times 11$.

La propiedad distributiva es la que nos permite, en álgebra, plantear expresiones tales como:

$$2(a + b) = 2a + 2b$$
$$3(x - y) = 3x - 3y$$

Los niños de las escuelas primarias aplican la propiedad distributiva en la multiplicación. Consideremos el problema de multiplicar 7×43. La propiedad distributiva se aplica al considerar 7×43 como el producto de $7 \times (40 + 3)$, tal como se muestra a continuación

$$\begin{array}{rl} 43 & \\ \times 7 & \\ \hline 21 & = 7 \times 3 \\ 280 & = 7 \times 40 \\ \hline 301 & = (7 \times 3) + (7 \times 40) \end{array}$$

La propiedad distributiva puede también aplicarse en procedimientos que abrevian la multiplicación. Así, por ejemplo, el producto de 8×99 puede determinarse de inmediato como sigue:

$$8 \times 99 = 8(100 - 1) = 800 - 8 = 792$$

Se ha dicho que la propiedad distributiva es uno de los aspectos fundamentales de las matemáticas. Aquí se han visto diversas aplicaciones de ella y más adelante, en el Capítulo 5, se volverá a analizar dicha propiedad.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 3-2

En los Ejercicios del 1 al 6 considérese que $ significa "seleccionar

el mayor de los dos números dados", y $\otimes$ *significa "seleccionar el primero de los dos números dados".*

1. Determinar $3 \$ 8, 8 \$ 3, 3 \otimes 7, 7 \otimes 3$.
2. Determinar $3 \$ (5 \$ 2), (3 \$ 5) \$ 2$.
3. Determinar $7 \otimes (2 \otimes 3), (7 \otimes 2) \otimes 3$.
4. Determinar $5 \$ (1 \otimes 3), (5 \$ 1) \otimes (5 \$ 3)$.
5. Determinar $3 \otimes (2 \$ 7), (3 \otimes 2) \$ (3 \otimes 7)$.

6. Demuéstrese que $a \otimes (b \$ c) = (a \otimes b) \$ (a \otimes c) = a$ para todos los valores posibles de a, b y c. ¿Es válida la igualdad $a \$ (b \otimes c) = (a \$ b) \otimes (a \$ c)$?

7. ¿En la aritmética clásica es la suma distributiva con respecto de la suma? Es decir, ¿es válido $a + (b \neq c) = (a + b) + (a + c)$ para todos los valores posibles de a, b y c?

8. ¿En la aritmética clásica es la multiplicación distributiva con respecto a la multiplicación? Es decir, ¿es válida la igualdad $a \times (b \times c) = (a \times b) \times (a \times c)$ para todos los posibles valores de a, b y c?

Aplicar la propiedad distributiva para determinar cada uno de los siguientes productos en forma abreviada:

9. 7×79

10. 5×58

Determinar los valores de n que hacen válidas las siguientes igualdades:

11. $8(2 + 3) = 8 \cdot 2 + 8 \cdot n$

12. $5(3 + 4) = 5 \cdot 3 + n \cdot 4$

13. $7(4 + n) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 5$

14. $n(5 + 7) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7$

15. $(6 + 7)5 = 6 \cdot 5 + n \cdot 5$

16. $(5 + n)3 = 5 \cdot 3 + 9 \cdot 3$

17. $3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 3(5 + n)$

18. $4 \cdot 6 + 4 \cdot n = 4(6 + 3)$

19. $3 \cdot n + 7 \cdot n = (3 + 7)n$

20. $3(4 + n) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot n$

3-3 ARITMETICA DE RELOJ

Creemos ahora otro sistema matemático finito para reafirmar las ideas presentadas hasta aquí. Si son las 9 P.M. cuando usted em-

pieza a leer esta sección, ¿qué hora será al cabo de 5 horas? (¡Esperamos que no le lleve tanto tiempo dicha lectura!) ¿Está usted de acuerdo con el enunciado?

$$9 + 5 = 2$$

considerando que estamos hablando acerca de posiciones en un reloj de 12 horas?

Consideremos los números del 1 al 12 de un reloj de 12 horas como los elementos de conjunto T y supongamos que la suma, en dicho reloj, se basa en el conteo según la dirección de sus manecillas. Así por ejemplo, para determinar la suma de $9 + 5$, empezamos en las 9 y contamos 5 unidades en la dirección de las manecillas del reloj obteniéndose 2 como resultado.

Verifique que son correctos cada uno de los siguientes ejemplos:

$$8 + 7 = 3 \quad \text{(en un reloj de 12 horas)}$$
$$5 + 12 = 5 \quad \text{(en un reloj de 12 horas)}$$
$$3 + 11 = 2 \quad \text{(en un reloj de 12 horas)}$$

Podemos hacer una tabla de sumas para un reloj de 12 horas como la siguiente:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6.	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Obsérvese que independientemente de donde se empiece, al cabo de 12 horas volveremos a estar en el punto de partida. Por lo tanto, para cualquier elemento t del conjunto T se tiene:

$$t + 12 = t \qquad \text{(en el reloj de 12 horas)}$$

Tratemos de definir otras operaciones para esta aritmética basada en un reloj de 12 horas. ¿Qué significa la multiplicación? Multiplicar por un entero puede considerarse como una suma repetida. Por ejemplo, 3×5 en el reloj de 12 horas equivale a $5 + 5 + 5$. Dado que $5 + 5 = 10$ y $10 + 5 = 3$, podemos decir que en dicho reloj de 12 horas, $3 \times 5 = 3$.

Verifique que son correctos cada uno de los siguientes ejemplos:

$$4 \times 5 = 8 \qquad \text{(en el reloj de 12 horas)}$$
$$3 \times 9 = 3 \qquad \text{(en el reloj de 12 horas)}$$
$$3 \times 7 = 9 \qquad \text{(en el reloj de 12 horas)}$$

Los siguientes ejemplos proporcionan otras ilustraciones sobre la aritmética de reloj.

EJEMPLO 1: Resolver para t la ecuación $t + 6 = 2$, donde t puede tomar uno de los valores numéricos de un reloj de 12 horas.

Solución: En un reloj de 12 horas, $8 + 6 = 2$; por consiguiente, $t = 8$.
Obsérvese que también podemos determinar el valor de t empezando en las 6 y contando en la dirección de las manecillas del reloj hasta llegar a 2.

EJEMPLO 2: En base a un reloj de 12 horas, determinar el valor de t tal que $9/7 = t$.

Solución: Podemos considerar la igualdad $9/7 = t$ en una de las cuatro siguientes formas equivalentes:

$$9 = 7 \times t \qquad 9 = t \times 7$$

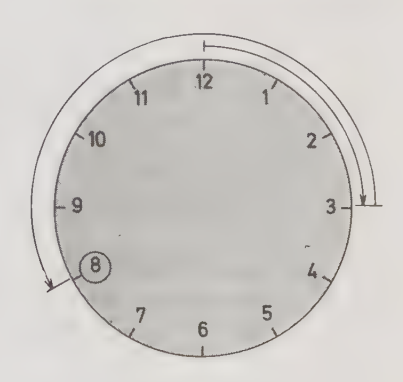
$$\frac{9}{7} = t \qquad \frac{9}{t} = 7$$

Podemos utilizar la igualdad $9 = 7 \times t$ para resolver el problema. ¿Cuántos grupos de 7 se requieren para obtener 9 en un reloj de 12 horas? En una tabla de multiplicar, o por tanteos, se determina que $7 \times 3 = 9$ (en un reloj de 12 horas); por consiguiente, $t = 3$.

EJEMPLO 3: ¿A qué es igual $3 - 7$ en un reloj de 12 horas?

Solución: Sea t una de las 12 horas del reloj. La igualdad "$3 - 7 = t$" es equivalente a "$t + 7 = 3$". En una tabla de sumas se determina que $8 + 7 = 3$ (en un reloj de 12 horas); por consiguiente $t = 8$.

Visto en otra forma, el Ejemplo 3 se puede resolver del siguiente modo: a partir del 12 se cuentan 3 unidades en la dirección de las manecillas del reloj, y a partir del 3 se cuentan 7 unidades en el sentido contrario. Dicho proceso termina en el 8. Así, $3 - 7 = 8$ (en un reloj de 12 horas).



El lector puede comparar la aritmética del reloj analizada en esta sección con el sistema numérico en base 12 visto en la Sección 2-6. Obsérvese que la aritmética de reloj es de hecho un sistema de restos. Todo múltiplo de 12 mayor que 12 se descarta y los resultados son números comprendidos entre 1 y 12. Consideremos el producto $5 \times 8 = 40$. Tanto en la aritmética del reloj como en el sistema numérico en base 12.

$$5 \times 8 = 40 = (3 \times 12) + 4.$$

En la aritmética del reloj, (3×12) representa 3 rotaciones que se descartan:

$$5 \times 8 = 4 \qquad \text{(en el reloj de 12 horas)}$$

Sin embargo, en el sistema en base 12 el propósito es escribir un número que represente a 5×8 en términos de 12:

$$5 \times 8 = 34_{12}$$

EJEMPLO 4: Comparar 7×9 en (a) la aritmética del reloj y en (b) el sistema en base 12.

Solución: (a) $7 \times 9 = 63$; $63 = (5 \times 12) + 3 = 3$ (en el reloj de 12 horas) (b) $7 \times 9 = 63$; $63 = (5 \times 12) + 3 = 53_{12}$.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 3-3

1. Determinar si el conjunto de números de un reloj aritmético es cerrado: **(a)** respecto de la suma. **(b)** Respecto de la multiplicación.

2. Hágase una tabla de multiplicar para un reloj de 12 horas.

3. Determinar si el conjunto de números del reloj consta de elementos idénticos respecto de la suma y de la multiplicación. De ser así, dígase cuáles son.

4. Coloque en una columna los números de un reloj aritmético. Al lado de cada uno de ellos ponga, si existen, el inverso respecto de la suma y el inverso respecto de la multiplicación. (Así por ejemplo, el inverso de 3 respecto de la suma es 9, en tanto que 3 no tiene inverso respecto de la multiplicación).

Resolver cada uno de los siguientes ejercicios considerados sobre un reloj de 12 horas:

5. $8 + 7$
6. $8 + 11$
7. $9 - 12$
8. $5 - 9$
9. 3×9
10. 5×5
11. $1 \div 5$
12. $2 \div 7$

Determinar todos los posibles valores de X para los cuales cada una de las siguientes igualdades son válidas en el reloj de 12 horas:

13. $t + 9 = 5$
14. $t - 3 = 11$
15. $8 + t = 2$
16. $3 - t = 10$
17. $3 \times t = 3$
18. $7 \times t = 11$
19. $\frac{t}{5} = 8$
20. $\frac{t}{7} = 9$

*21. $\frac{2}{t} = 3$

*22. $2 + t = 2 - t$

*23. $t + 12 = t$

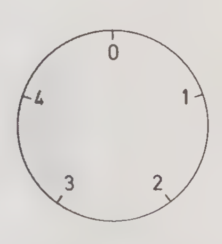
*24. $3 - t = 5 + t$

Resolver los siguientes ejercicios: **(a)** *en un reloj de 12 horas y* **(b)** *en el sistema de base 12:*

25. $9 + 9$
26. $8 + 6$
27. 5×9
28. 3×8
29. 6×6
30. 8×7

3-4 ARITMETICA MODULAR

Consideremos ahora un sistema matemático basado en un reloj de cinco horas numerado 0, 1, 2, 3 y 4 tal como se muestra en la figura anexa.



En dicho reloj la suma se puede efectuar por el mismo método de

conteo que ya se ha expuesto para el reloj clásico. Sin embargo, resulta cómodo pensar en la suma como rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj. Así por ejemplo, $3 + 4$ indica que, empezando en 0 se giran 3 unidades y después 4 más. El resultado es 2.

El 0 se considera para indicar que no hay rotación así como para designar una de las posiciones del reloj. Así pues se tienen casos tales como:

$3 + 0 = 3$ (en un reloj de 5 horas)
$4 + 1 = 0$ (en un reloj de 5 horas)

Verifique que la siguiente tabla de sumas para un reloj de 5 posiciones es correcta:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

La multiplicación en un reloj de cinco posiciones se define, como en el inciso 3-4, como sumas repetidas. Por ejemplo, 3×4 en el reloj de cinco posiciones equivale a $4 + 4 + 4$. Dado que $4 + 4 = 3$ y $3 + 4 = 2$, se dice que $3 \times 4 = 2$ en el reloj de cinco posiciones.

Se define la resta y la división mediante enunciados equivalentes, como sigue:

Resta: Dado que los enunciados "$a - b = x$" y "$a = b + x$" son equivalentes, se define $a - b = x$ *si y sólo si* $b + x = a$.

División: Dado que los enunciados "$a \div b = x$" y "$a = b \times x$" son equivalentes, se define $a \div b = x$ *si y sólo si* $b \times x = a$.

Independientemente de la posición en la que se empiece en este reloj al cabo de cinco posiciones siempre se llegará al mismo punto de partida.

Por lo general, los símbolos de un sistema matemático basado en la aritmética del reloj empiezan por 0, y el sistema recibe el

nombre de **aritmética modular.** En el ejemplo ilustrativo de esta sección podemos decir que se trata de una aritmética módulo 5, utilizándose los símbolos 0, 1, 2, 3, 4. Formalmente, los casos específicos en este sistema matemático se enuncian como sigue:

$3 + 4 \equiv 2 \pmod 5$, léase "$3 + 4$ es congruente con 2, módulo 5",
$4 \times 2 \equiv 3 \pmod 5$, léase "$4 \times 2$ es congruente con 3, módulo 5".

En general, dos números son **congruentes módulo 5** si y sólo si difieren por un múltiplo de 5. Así por ejemplo, 3, 8, 13 son uno a otro congruentes módulo 5. Podemos enunciar, por ejemplo:

$$18 \equiv 13 \pmod 5);$$
$$8 \equiv 3 \pmod 5).$$

Obsérvese que todo entero en la aritmética clásica es congruente módulo 5 a uno de los elementos del conjunto F, donde $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Es obvio que el conjunto F es el conjunto de todos los posibles restos que pueden resultar al dividir cualquier número entre 5. Los elementos de F son los elementos de la aritmética módulo 5.

EJEMPLO 1: Hallar el valor de x que satisface $2 - 3 = x$ donde x puede ser uno de los elementos de la aritmética módulo 5.

Solución: Obsérvese que el enunciado "$2 - 3 = x$" es equivalente a "$3 + x = 2$". Dado que $3 + 4 = 2$, $x = 4$.

EJEMPLO 2: Hallar, en la aritmética módulo 5, el valor de x que satisface $2/3 = x$.

Solución: Obsérvese que el enunciado "$2/3 = x$" es equivalente a $3 \times x = 2$". Dado que $3 \times 4 = 2$, $x = 4$.

Investiguemos las propiedades del sistema matemático basado en el conjunto $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ así como la operación de suma

tal como se ha definido en este inciso. Las siguientes propiedades son de especial interés.

1. *El conjunto F de los elementos en la aritmética módulo 5 es cerrado respecto de la suma.* Es decir, para una pareja cualquiera de elementos, existe un elemento único que representa su suma y el cual es también elemento del conjunto original. Se ve, por ejemplo, que hay un término y sólo uno en cada lugar de la tabla dada en este inciso y que dicho término es elemento del conjunto F.

2. *El conjunto F de los elementos en la aritmética módulo 5 satisfacen la propiedad conmutativa para la suma.* Es decir,

$$a + b = b + a,$$

donde a y b son dos elementos cualesquiera del conjunto F. Por ejemplo, se ve que $3 + 4 = 4 + 3$, $2 + 3 = 3 + 2$, etc.

3. *El conjunto F de los elementos en la aritmética módulo 5 satisface la propiedad asociativa para la suma.* Es decir,

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

para todo elemento a, b y c del conjunto F.

A título de ejemplo calcularemos en dos formas $3 + 4 + 2$:

$$(3 + 4) + 2 \equiv 2 + 2 \text{ o } 4, \text{ módulo } 5;$$
$$3 + (4 + 2) \equiv 3 + 1 \text{ o } 4, \text{ módulo } 5.$$

4. *El conjunto F de los elementos en la aritmética módulo 5 contiene al elemento idéntico para la suma.* Es decir, el conjunto contiene un elemento 0, tal que la suma de un elemento cualquiera dado y 0 es el elemento dado. Es decir:

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 0 = 1, \quad 2 + 0 = 2,$$
$$3 + 0 = 3, \quad 4 + 0 = 4.$$

5. *Cada uno de los elementos en la aritmética módulo 5 tiene su inverso respecto de la suma.* Es decir, para cada elemento a del conjunto F existe un elemento a' en F tal que $a + a' = 0$. Se dice que el elemento a' es el inverso de a. Dichos elementos son los siguientes:

El inverso de 0 es 0; $0 + 0 \equiv 0 \pmod 5$
El inverso de 1 es 4; $1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$
El inverso de 2 es 3; $2 + 3 \equiv 0 \pmod 5$

El inverso de 3 es 2; $3 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$
El inverso de 4 es 1; $4 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$

Como en la Sección 3-1, podemos resumir estas cinco propiedades diciendo que el conjunto F de los elementos de la aritmética módulo 5 forman un grupo conmutativo bajo la adición.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 3-4

Cada uno de los siguientes está basado sobre el conjunto de los elementos de la aritmética módulo 5:

1. Hágase una tabla de multiplicar.

2. Verifique que la propiedad conmutativa para la multiplicación es válida al menos para dos casos concretos.

3. Verifique que la propiedad asociativa para la multiplicación es válida al menos para dos casos concretos.

4. ¿Cuál es el elemento idéntico para la multiplicación?

5. Determinar el inverso de cada uno de los elementos para la multiplicación.

6. Verificar para dos casos concretos al menos que la aritmética módulo 5 satisface la propiedad distributiva para la multiplicación con respecto a la adición.

Resolver para x cada una de las siguientes ecuaciones:

7. $2 + x \equiv 1 \pmod{5}$
8. $x + 4 \equiv 2 \pmod{5}$
9. $x + 3 \equiv 2 \pmod{5}$
10. $4 + x \equiv 1 \pmod{5}$
11. $1 - 3 \equiv x \pmod{5}$
12. $1 - 4 \equiv x \pmod{5}$
13. $2 - 4 \equiv x \pmod{5}$
14. $3 - x \equiv 4 \pmod{5}$
15. $2 \times x \equiv 3 \pmod{5}$
16. $4 \times x \equiv 2 \pmod{5}$
17. $4 \times x \equiv 1 \pmod{5}$
18. $3 \times x \equiv 1 \pmod{5}$
19. $\frac{1}{2} = x \pmod{5}$
20. $\frac{4}{3} \equiv x \pmod{5}$

21. $\frac{3}{x} \equiv 2 \pmod 5$

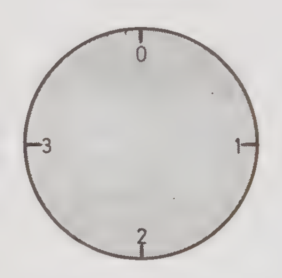
22. $\frac{2}{x} \equiv 3 \pmod 5$

23. $x + 3 \equiv x \pmod 5$

24. $x + 1 \equiv 3 - x \pmod 5$

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 3-4

1. Considere una aritmética para un reloj con cuatro elementos (0, 1, 2, 3), tal como se ve en la siguiente figura. Haga tablas para sumas y multiplicaciones para la aritmética módulo 4. Investigue dichos sistemas y enuncie para cada uno de ellos tantas propiedades como pueda.



2. Utilizando los resultados del Ejercicio 1 diga si el conjunto de los elementos de la aritmética módulo 4 forma un grupo conmutativo respecto de **(a)** la adición y **(b)** la multiplicación. De lo contrario, diga qué propiedades no se satisfacen bajo la operación dada.

Determinar los posibles valores de x para los cuales cada una de las siguientes proposiciones sea un enunciado válido:

3. $x + 5 \equiv 0 \pmod 7$

4. $x - 3 \equiv 2 \pmod 4$

5. $3x \equiv 1 \pmod 7$

6. $x \times x \equiv 1 \pmod 8$

7. $\frac{x}{4} \equiv 3 \pmod 9$

8. $\frac{2}{x} \equiv 3 \pmod 7$

9. $1 - x \equiv 4 \pmod 6$

10. $4 + x \equiv 1 \pmod 7$

11. $x + 5 \equiv 1 \pmod 8$

12. $2 - x \equiv 3 \pmod 6$

13. $2x \equiv 3 \pmod{6}$

14. $\frac{x}{3} \equiv 4 \pmod{8}$

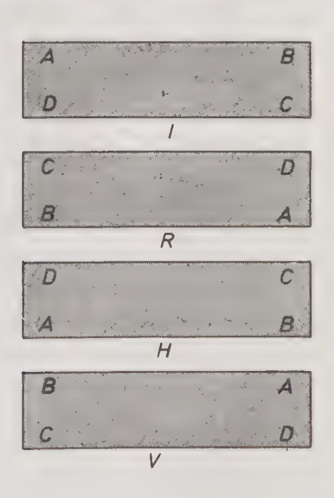
15. $x - 5 \equiv 2 \pmod{7}$

16. $7 + x \equiv 1 \pmod{12}$

17. La propiedad ilustrada por la ecuación $3 \times 4 = 0$ en aritmética módulo 12, en la cual el producto es cero pese a que ninguno de los factores es cero, se expresa diciendo que el 3 y el 4 son divisores cero. ¿Existen otros divisores en aritmética módulo 12? De ser así, enumérelos.

18. Considérese un sistema módulo 7 en el cual los días de la semana corresponden a los números del siguiente modo: domingo — 0, lunes — 1; martes — 2; miércoles — 3; jueves — 4; viernes — 5; sábado — 6. Supongamos que el 30 de mayo —el día que hace 150 del año— cae en jueves. ¿En qué día cae el 4 de julio —el día que hace 185— de ese mismo año? ¿En qué día cae Navidad —el día que hace 359— de ese año?

19. Tómese una tarjeta y etiquétense sus esquinas tal como se muestra en la figura 1. Escríbanse también las mismas letras en las correspondientes esquinas del reverso de la tarjeta. Llamemos *I* a esa posición inicial. Giremos la tarjeta 180° a fin de obtener la posición *R*. De la posición inicial *I*, por medio de un giro en torno de su eje horizontal, se obtiene la posición *H*. Finalmente, de la



posición inicial *I*, por medio de un giro en torno de su eje vertical, se obtiene la posición *V*. Utilicemos el símbolo ~ para indicar "se-

guida por". Así por ejemplo, $H \sim R$ indica una rotación alrededor del eje horizontal seguida por una rotación de 180°. Determínese que $H \sim R = V$. Verifique también que $V \sim H = R$.

Hágase una tabla para este sistema en la cual los encabezados horizontales y verticales sean I, R, H y V. Enúnciense tantas propiedades como se puedan para este sistema.

20. Consideremos un soldado de frente a una dirección dada. Se le dan órdenes tales como "a la derecha", "a la izquierda", "media vuelta" y "en su lugar". La última orden le indica permanecer en la posición que tiene en ese momento.

Algunos ejemplos concretos de los movimientos aclararán la cuestión. Si está de cara al Norte y recibe la orden "media vuelta", en su nueva posición está de cara al Sur. Si representamos por D la orden "a la derecha", por M la orden "media vuelta" y por I la orden "a la izquierda", entonces D seguida de M equivale a la simple orden I.

Utilícese el símbolo ° para representar la operación "seguida por" y verifíquese que los siguientes enunciados son correctos:

$$I \circ I = M$$
$$I \circ M = D$$
$$M \circ D = I$$

Supongamos ahora que el soldado da vuelta a la izquierda y que se quiere que permanezca en dicha posición. Se hace uso entonces de la orden "en su lugar", que representaremos por E. Entonces, $I \circ E = I$, también $E \circ I = I$.

(a) Hágase una tabla resumiendo todos los movimientos posibles, utilizando los encabezados E, D, I y M.
(b) Determinar $D \circ D$, $M \circ M$, $I \circ I$.
(c) ¿Es válida la igualdad $D \circ I = I \circ D$?
(d) ¿Es válida la igualdad $D \circ (I \circ M) = (D \circ I) \circ M$?
(e) ¿Es conmutativo y asociativo respecto a la operación o el conjunto de las órdenes dadas?
(f) Determinar el elemento idéntico respecto a o.
(g) Enumerar el inverso de cada uno de los elementos del conjunto.
(h) ¿Es cerrado respecto a o el conjunto de órdenes?

EXAMEN RELATIVO AL CAPITULO 3

Haciendo referencia a la siguiente tabla responder a las preguntas de los Ejercicios del 1 al 4:

⊗	#	*	Σ	Δ
#	Σ	Δ	#	*
*	Δ	#	*	Σ
Σ	#	*	Σ	Δ
Δ	*	Σ	Δ	#

1. ¿Cuál es el el elemento idéntico?

2. ¿Cuál es el inverso de Δ?

3. ¿Cuál es el elemento $(\# \otimes \Delta) \otimes *$?

4. Para todos los valores que pueden tomar a y b en el conjunto $Y = \{\#, *, \Sigma, \Delta\}$, $a \otimes b$ es un elemento de Y. ¿Qué nombre recibe esta propiedad?

Considerando el reloj de 12 horas, resolver:

5. (**a**) $9 + 7$ (**b**) 5×11

6. (**a**) $2 - 7$ (**b**) $2 \div 5$

Determinar todos los posibles valores de x para los cuales cada una de las siguientes proposiciones es un enunciado válido:

7. (**a**) $3 + x \equiv 1 \pmod 5$ (**b**) $2 - x \equiv 4 \pmod 5$

8. (**a**) $x + 2 \equiv 0 \pmod 7$ (**b**) $3 - x \equiv 5 \pmod 8$

9. (**a**) $3x \equiv 2 \pmod 6$ (**b**) $\frac{x}{3} \equiv 2 \pmod 5$

10. Aplicando la propiedad distributiva calcular $3(2 + 4)$ en aritmética módulo 5 de dos formas diferentes.

Capítulo 4

CONJUNTOS Y PROPOSICIONES

El concepto de conjunto no sólo aparece en todas las ramas de la matemática sino que también se aplica en muchos aspectos de la vida cotidiana Cuantas veces no nos referimos a un conjunto de plumas y lápices, a un conjunto de platos, a un conjunto de libros o, de alguna otra forma, identificamos una colección de objetos como un conjunto. Las proposiciones nos son fundamentales como la base primaria para la comunicación escrita y oral.

En matemáticas utilizamos

conjuntos de números en aritmética.
conjuntos de soluciones de ecuaciones en álgebra.
conjuntos de puntos en geometría.

Muchos consideran el uso de conjuntos de elementos como el

tema que unifica todas las ramas de la matemática. La extensión que abarca el concepto de conjunto a través de toda la matemática lo ilustra el hecho de que el concepto de conjunto se introduce en los primeros grados de la escuela primaria y sirve también de base para los cursos de matemáticas a nivel universitario.

4-1 NOTACION PARA CONJUNTOS

En nuestro idioma existen muchas palabras que indican conjuntos: *banco* de peces, *enjambre* de abejas, *parvada* de pájaros, *rebaño* de ovejas, *escuadra* de barcos, etc.

Un conjunto es una colección de cosas que reciben el nombre de **elementos** o **términos** del conjunto. Así por ejemplo, podemos hablar de:

1. El conjunto de letras del alfabeto español.
2. El conjunto de los estados de la República Mexicana.
3. El conjunto de los nombres de los días de la semana.
4. El conjunto de los números naturales de 1 a 5.

Cada uno de los precedentes conjuntos se dice que está **definido.** Es decir, a partir de la descripción, dado un elemento cualquiera se puede determinar si pertenece o no al conjunto. Por ejemplo, sabemos que *r, s* y *t* son elementos del primer conjunto enunciado, en tanto que θ y $\aleph_0$ se ve claramente que no lo son. ¿Puede decirse, a partir de la descripción dada, cuáles de los siguientes números pertenecen al último de los conjuntos descritos arriba?

$$3, \quad 2\tfrac{1}{2}, \quad 8, \quad 1, \quad 12$$

Se verá que 3 y 1 son elementos de dicho conjunto, en tanto que $2\frac{1}{2}$, 8 y 12 no lo son. El conjunto de los números naturales de 1 a 5 es un conjunto definido, una vez que se ha definido el conjunto de los números naturales como el conjunto 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y así sucesivamente.

No todos los conjuntos están definidos. Trate de explicar por qué los conjuntos que a continuación se describen no están definidos.

1. El conjunto de los buenos jugadores de tenis.
2. El conjunto de los números interesantes.
3. El conjuntc de las bellas artistas de cine.
4. El conjunto de los libros bien escritos.

En este libro consideraremos principalmente conjuntos definidos. Por otra parte, convendremos en designar un conjunto por medio de una letra mayúscula cualquiera y en dar la lista de los elementos del conjunto encerrándolos entre llaves, tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1: Escribir en notación de conjuntos: el conjunto W de los nombres de los días de la semana.

Solución: W = {Domingo, Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado}.

EJEMPLO 2: Escribir la lista de los elementos del conjunto I de los números naturales de 1 a 5.

Solución:

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

El símbolo de pertenencia $\in$ se aplica con frecuencia como en

$$2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{y} \quad 7 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

para indicar los elementos que pertenecen o no pertenecen a los conjuntos. El símbolo $\in$ se lee como "es un elemento de" o "pertenece a" y el símbolo $\notin$ como "no es elemento de" o "no pertenece a" un conjunto dado.

En los casos en que resulta incómodo poner la lista de todos los elementos de un conjunto, es frecuente emplear puntos suspensivos para indicar elementos omitidos.

EJEMPLO 3: Hágase la lista de los elementos del conjunto A de las letras del alfabeto español.

Solución:

$$A = \{a, b, c, \ldots, z\}.$$

Obsérvese que cuando se utilizan los puntos suspensivos para indicar elementos omitidos, es necesario enunciar los elementos en algún orden que permita identificar los elementos omitidos.

También es costumbre emplear puntos suspensivos al final de una sucesión de elementos para indicar que el conjunto continúa indefinidamente en el modelo propuesto; es decir, para señalar que existe un número infinito de elementos en el conjunto.

EJEMPLO 4: Listar los elementos del conjunto G de los enteros mayores que 100.

Solución:

$$G = \{101, 102, 103, \ldots\}.$$

Es también conveniente saber proporcionar descripciones verbales para conjuntos de elementos dados en forma de lista. El siguiente ejemplo ilustra este punto.

EJEMPLO 5: Escribir una descripción verbal para el conjunto

$$Y = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Solución: Pueden darse diversas respuestas correctas. Dos de ellas son: "El conjunto de los enteros impares de 1 a 9"; "El conjunto de los enteros impares comprendidos entre 0 y 11". Obsérvese que la expresión "comprendidos entre" implica que

el primer número y el último, es decir, el 0 y el 11, no se incluyen como elementos del conjunto dado.

La propiedad básica de un conjunto de elementos es la identificación de sus términos. Un conjunto está definido si pueden identificarse sus elementos. Los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 1, 2\}$ son iguales dado que tienen los mismos elementos. Cuando dos conjuntos constan de los mismos elementos, se dice que son **conjuntos iguales,** es decir, **conjuntos idénticos.** Escribimos $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$, dado que el orden en que aparezcan los elementos en el conjunto no afecta a su pertenencia al conjunto; también $\{1, 1, 2\} = \{1,2\}$, dado que el que aparezca un elemento más de una vez en un conjunto, no afecta a su pertenencia al conjunto, y, en general, escribimos $A = B$ para indicar que los conjuntos A y B tienen los mismos elementos. Escribimos $A \neq B$ para indicar que los conjuntos A y B no tienen los mismos elementos.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 4-1

Sustituir el asterisco (*) por $\in$ o $\notin$ a fin de obtener una proposición válida:

1. $7 * \{1, 3, 5, 7, 9\}$

2. $7 * \{2, 4, 6, 8, 0\}$

3. $\triangle * \{., |, \square\}$

4. $\triangle * \{/, \wedge, \triangle\}$

Dígase cuáles de los siguientes conjuntos están definidos:

5. El conjunto de los astronautas americanos que han entrado en órbita alrededor de la Tierra.

6. El conjunto de las ciudades americanas que son capitales de estado.

7. El conjunto de los estados más grandes de los E.U.A.

8. El conjunto de los estados de los E.U.A. con buen clima.

Dígase si los siguientes conjuntos de letras son iguales o no como conjuntos.

9. $\{r, a, z, ó, n\}$; $\{a, r, z, ó, n\}$.

10. $\{r, a, p, o\}$; $\{a, p, o, r, t, a\}$.

11. $\{z, o, r, r, a\}$; $\{a, r, r, o, z\}$.

12. $\{p, r, o, f, e, s, o, r\}$; $\{s, o, r, p, r, e, s, a\}$.

Utilizando la notación indicada en este inciso, enumérense los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

13. El conjunto de los nombres de los meses del año.

14. El conjunto de las letras del alfabeto español que preceden a la *j*.

15. El conjunto de los números naturales comprendidos entre 1 y 10.

16. El conjunto de los números naturales impares menores que 25.

Exprese verbalmente cada uno de los siguientes conjuntos:

17. $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
18. $R = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$
19. $S = \{51, 52, 53, \ldots\}$
20. $M = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$
21. $K = \{10, 20, 30, \ldots, 150\}$
22. $T = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

*23. $P = \{0, 2, 6, 12, 20, \ldots, 90\}$

*24. $A = \{8, 5, 4, 9, 1, 7, 6, 3, 2\}$

4-2 SUBCONJUNTOS

Cuando se habla sobre cualquier tema particular, el conjunto que consta de la totalidad de los elementos de que se habla, recibe el nombre de **conjunto universal** U, y éste puede ser distinto según el tema de que se trate. Supóngase, por ejemplo, que queremos hablar del conjunto de los números naturales de 1 a 9. En este caso el conjunto universal es:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Un conjunto A es un **subconjunto** de U si el conjunto A tiene la propiedad de que cada uno de sus elementos es también elemento de U. Se expresa por medio de la notación $A \subseteq U$ (léase "A está incluido en U"). Existen muchos subconjuntos de U; a continuación se enumeran algunos:

$$A_1 = \{1, 2, 3\}$$
$$A_2 = \{1, 5, 7, 8, 9\}$$
$$A_3 = \{2\}$$
$$A_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

En lo particular, obsérvese que el conjunto A_4 contiene a cada uno de los elementos de U y es clasificado como un subconjunto de U. Cualquier conjunto se dice que es subconjunto de sí mismo.

Se dice que un conjunto A es **subconjunto propio** de U si A es un subconjunto de U y existe al menos un elemento de U que no es elemento de A. Se expresa por la notación $A \subset U$ (léase "A está incluido propiamente en U"). De un modo intuitivo, al hablar de un subconjunto propio nos referimos a una parte de un conjunto dado y no a todo el conjunto. Cada uno de los subconjuntos A_1, A_2, A_3 y A_4 son subconjuntos de U; los conjuntos A_1, A_2 y A_3 son subconjuntos propios de U; el conjunto A_4 no es un subconjunto propio de U. Podemos escribir lo anterior en forma simbólica del siguiente modo:

$$A_1 \subset U; \qquad A_2 \subset U; \qquad A_3 \subset U; \qquad A_4 \subseteq U.$$

EJEMPLO 1: Definir tres subconjuntos propios del conjunto R donde

$$R = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Solución: Tres subconjuntos propios del conjunto R son:

$$A = \{1, 2\}; \qquad B = \{1, 3, 4\}; \qquad C = \{1\}.$$

¿Se da cuenta el lector de que existen otros? Obsérvese que la elección de las letras para nombrar a cada uno de los subconjuntos es enteramente arbitraria.

El conjunto **vacío** o **nulo** es el conjunto que no contiene ningún elemento y se denota por el símbolo $\varnothing$ o por el símbolo $\{\ \}$. Obsérvese que el primer símbolo dado para el conjunto vacío no se encierra dentro de llaves. Algunos ejemplos de conjuntos vacíos son:

El conjunto de los enteros comprendidos entre 2 y 3.
El conjunto de los estados de los E.U.A. que limitan a la vez con el Océano Atlántico y con el Océano Pacífico.

Un conjunto A se ha definido como subconjunto de un conjunto B si cada elemento de A es también elemento de B. Si se quiere demostrar que un conjunto A no es subconjunto de un conjunto B, es necesario determinar un elemento de A que no pertenezca a B. Por ejemplo, si $G = \{1, 3, 5\}$ y $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces $G \subseteq H$ pero $H \nsubseteq G$, dado que $2 \in H$ pero $2 \notin G$ y que $4 \in H$ pero $4 \notin G$. Obsérvese que dado que el conjunto vacío no tiene elementos, no existen elementos del conjunto vacío que no puedan ser elementos de un conjunto B. Por consiguiente, el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto B; $\varnothing \subseteq B$ para todo conjunto B.

EJEMPLO 2: Definir todos los posibles subconjuntos del conjunto $U = \{1, 2\}$.

Solución:

$$\varnothing;\ \{1\};\ \{2\};\ \{1, 2\}.$$

En la solución del Ejemplo 2 obsérvese que los subconjuntos de $\{1, 2\}$ son los conjuntos que se obtienen incluyendo o no cada uno de los elementos del conjunto dado. Si incluímos ambos elementos, se obtiene $\{1, 2\}$; si incluímos uno solo de los elementos, obtenemos $\{1\}$ o $\{2\}$; si no incluímos ninguno de los elementos, obtenemos el conjunto vacío. Dado que hay dos elementos y dos posibilidades para cada elemento (considerarlo o no considerarlo), existen 2×2 subconjuntos, tal como se ha obtenido.

Los subconjuntos obtenidos en el Ejemplo 2 pueden aparearse de la siguiente forma:

$$\{1, 2\} \text{ con } \varnothing, \text{ y } \{1\} \text{ con } \{2\}.$$

Obsérvese que los dos conjuntos de cada pareja no tienen ningún elemento en común y que contienen todos los elementos del conjunto dado $\{1, 2\}$. Con relación al conjunto dado, dado el conjunto $\{1\}$, podemos determinar el conjunto correspondiente $\{2\}$; dado el conjunto $\{2\}$, podemos determinar el conjunto correspondiente $\{1\}$; dado el conjunto $\{1, 2\}$, podemos determinar el conjunto $\varnothing$; y dado el conjunto $\varnothing$ podemos determinar el conjunto $\{1, 2\}$. Este proceso se puede enunciar como la determinación del complemento de un conjunto con relación al conjunto dado $\{1, 2\}$.

Dado un conjunto universal U cualquiera, cada conjunto A tiene un complemento A' (se simboliza también por $\overline{A}$) que consta de los elementos U que no son elementos de A y recibe el nombre de **complemento de A con relación a U**. Por ejemplo, si $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $A = \{1, 3, 7\}$, entonces $A' = \{5, 9\}$. Si $A = U$, entonces $A' = \varnothing$; si $A = \varnothing$, entonces $A' = U$. Es decir, el complemento del conjunto universal es el conjunto vacío; el complemento del conjunto vacío es el conjunto universal.

EJEMPLO 3: Defínanse los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y aparéese cada conjunto con su conjunto complementario.

Solución:

$\{1, 2, 3\}$	$\varnothing$
$\{1\}$	$\{2, 3\}$
$\{2\}$	$\{1, 3\}$
$\{3\}$	$\{1, 2\}$

Es lógico suponer que todos los posibles subconjuntos se obtendrán considerando los elementos tres a tres, dos a dos, uno a uno, y, por último, cero veces. Como comprobación de que hemos determinado todos los posibles subconjuntos, obsérvese que el conjunto original tiene tres elementos y que se tienen dos posibilidades para cada elemento (considerarlo o no considerarlo); $2 \times 2 \times 2 = 8$ y 8 son los subconjuntos obtenidos.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 4-2

1. Describir tres conjuntos vacíos.

2. Sea $U = \{c, a, r, o\}$; enúnciense los elementos de A' al definir A como
   (a) $\{c, a, r\}$
   (b) $\{o, c, a\}$
   (c) $\{r, o\}$
   (d) $\varnothing$

3. Sea $U = \{p, r, o, f, e, s, o, r\}$; enúnciense los elementos de A' al definir A como
   (a) $\varnothing$
   (b) $\{r, o, p, e\}$
   (c) $\{r, o, s, e\}$
   (d) $\{p, r, o, s, e\}$

4. Sea U el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$ y A el conjunto de los números naturales pares. Descríbase el conjunto A'.

5. Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7; 9\}$ y $B = \{3, 6, 9\}$ determinar
   (a) A'
   (b) B'

6. Definir todos los posibles subconjuntos de cada uno de los siguientes conjuntos:
   (a) $\{a\}$
   (b) $\{a, b\}$
   (c) $\{a, b, c\}$
   (d) $\{a, b, c, d\}$
   (e) $\{a, b, c, d, e\}$
   (f) $\varnothing$

7. Utilizando los resultados obtenidos en el Ejercicio 6, cópiese y complétese la siguiente tabla:

Número de elementos	0	1	2	3	4	5	6
Número de subconjuntos	1						

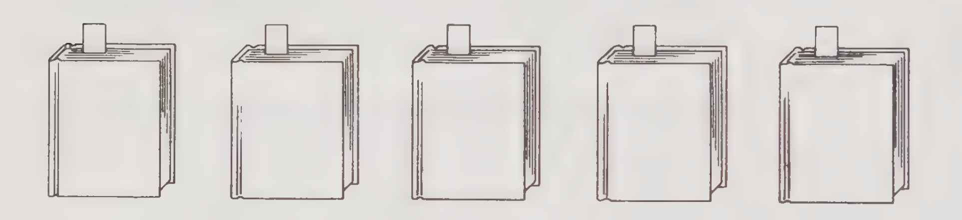
8. Hacer una tabla como la del Ejercicio 7 para el número de subconjuntos propios de los conjuntos del Ejercicio 6.

9. Utilizando los resultados del Ejercicio 7, dedúzcase una fórmula para el número N de subconjuntos que pueden obtenerse de un conjunto de n elementos.

10. Utilizando los resultados del Ejercicio 8, dedúzcase una fórmula para el número N de subconjuntos propios que pueden obtenerse de un conjunto de n elementos.

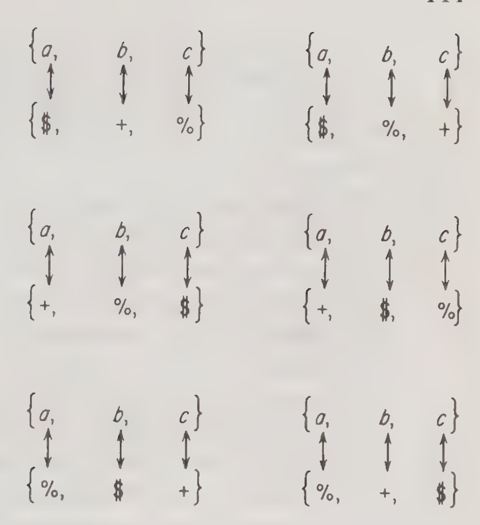
4-3 CONJUNTOS EQUIVALENTES

Si se tiene un conjunto de libros, pueden contarse éstos y utilizar un número para decir cuántos libros hay en el conjunto. De la misma forma se puede proceder si se tiene un conjunto de señales para libros. Si lo que se pretende es estar seguro que se tiene exactamente una señal para cada uno de los libros, no es necesario contar ni unos ni otros. Basta colocar una señal en cada libro. Si esto se



hace de tal forma que se utilizan todas las señales y todos los libros quedan señalados, entonces se tiene la seguridad de que hay el mismo número de libros en el conjunto de libros que de señales en el conjunto de señales. Se dice entonces que existe una correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos.

Se dice que dos conjuntos, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ están en **correspondencia biunívoca** si se puede establecer un apareamiento de las x y y tal que a cada x le corresponda una y sólo una y y a cada y le corresponda una y sólo una x. Consideremos los conjuntos $R = \{a, b, c\}$ y $S = \{\$, +, \%\}$. Podemos asociar el elemento $a \in R$ a uno cualquiera de los elementos de S (tres posibilidades); podemos entonces asociar $b \in R$ con uno cualquiera de los otros dos elementos de S (dos posibilidades, y, por último, asociamos $c \in R$ con el elemento restante de S (una posibilidad). Por consiguiente se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de los conjuntos R y S de $3 \times 2 \times 1$ (es decir, 6) formas:

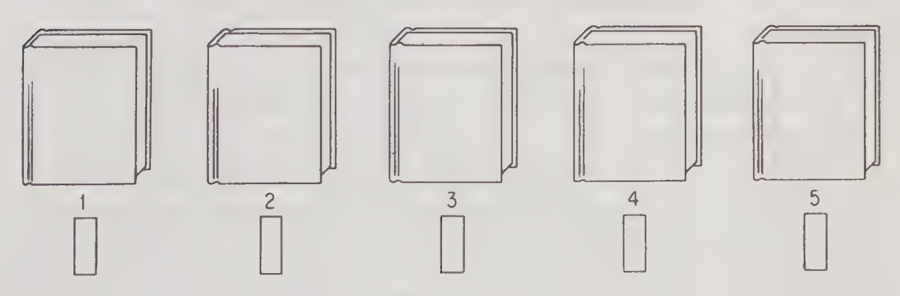


Dos conjuntos A y B que pueden asociarse en correspondencia biunívoca, se dice que son **conjuntos equivalentes** (se simboliza por $A \leftrightarrow B$). Dos conjuntos equivalentes cualesquiera tienen el mismo número de elementos, es decir, el mismo número **cardinal.**

Se puede utilizar el concepto de correspondencia biunívoca para determinar si dos conjuntos cualesquiera tienen o no el mismo número de elementos. También se utiliza este concepto de correspondencia biunívoca cuando se cuentan los elementos de un conjunto. Al contar se utiliza el conjunto de los números naturales

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Al igual que en §4-1, los puntos suspensivos indican que los elementos se suceden indefinidamente. Si se contasen los libros del conjunto señalado en la figura, se emplearía el conjunto de números {1, 2, 3, 4, 5} Se determinaría una correspondencia biunívoca entre los libros y los números. Si se contasen las señales de li-



bros, se utilizaría el mismo conjunto de números. *Dos conjuntos que se pueden poner en correspondencia biunívoca con el mismo conjunto de números pueden ponerse en correspondencia biunívoca entre sí y tienen por consiguiente el mismo número de elementos.*

Cualquier conjunto A de elementos que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de elementos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ se dice que tiene 5 elementos y se escribe $n(A) = 5$ para indicar que el número de elementos en el conjunto A es 5. Cualquier conjunto B de elementos que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de elementos $\{1, 2, 3, 4, \ldots, k\text{-}1, k\}$ se dice que tiene k elementos; $n(B) = k$. Obsérvese el empleo del conjunto de los números naturales y las correspondencias biunívocas para determinar el número de elementos que hay en un conjunto, es decir, para determinar el **número cardinal** de un conjunto. Cuando los números naturales se toman en orden, el útimo número empleado en la correspondencia biunívoca es el número cardinal del conjunto. Se define la cardinalidad del conjunto vacío como cero; es decir, $n(\varnothing) = 0$.

Se ha utilizado la correspondencia biunívoca para determinar el número cardinal de un conjunto de números. Ha quedado establecido que el último número natural utilizado será el número cardinal del conjunto. No obstante se nos plantea la cuestión si habrá siempre un "último" número natural. Consideremos cada uno de los siguientes conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2n, \ldots\}$$
$$C = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n - 1, \ldots\}$$
$$D = \{2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots, 2^n, \ldots\}$$
$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$
$$F = \{10, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots, 10^n, \ldots\}$$

Cada uno de estos conjuntos no tiene un último elemento y en consecuencia el conjunto no tiene un número natural como número cardinal.

EJEMPLO: Consideremos los conjuntos A y B:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2n, \ldots\}$$

Explicar: (a) $B \subseteq A$; (b) $B \neq A$; (c) $B \subset A$; (d) B es equivalente a A.

Solución: (a) Cada elemento de B es también elemento de A; es decir, B es un subconjunto de A, $B \subseteq A$.

(b) Existe al menos un elemento de A (por ejemplo, 1) que no es elemento de B; por consiguiente B y A son conjuntos diferentes, $B \neq A$.

(c) El conjunto B es un subconjunto de A [véase la parte (a)] que no contiene a todos los elementos de A [véase la parte (b)]; es decir, B es un subconjunto propio de A, $B \subset A$.

(d) La correspondencia biunívoca entre n y $2n$, elementos respectivos de A y B, establece la equivalencia de A y B según se muestra en el siguiente esquema.

$$\begin{array}{lcccccccc} A: \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ B: \{ & 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, & \ldots\} \end{array}$$

Obsérvese que se ha demostrado que el conjunto A es equivalente a uno de sus subconjuntos propios.

Un conjunto que es equivalente a uno de sus subconjuntos propios es un **conjunto infinito.** Cualquier conjunto infinito no tiene último término y tampoco número cardinal. El conjunto vacío y cualquier conjunto que tenga un número natural como número cardinal recibe el nombre de **conjunto finito.**

El número cardinal de un conjunto infinito se dice que es un **número cardinal transfinito.** Sin embargo, como en el caso de los libros y las señales de libros no necesitamos determinar los números cardinales de dos conjuntos para establecer que tienen el mismo número de elementos. Sólo se necesita demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos. Los conjuntos A y B tienen el mismo número de elementos, $n(A) = n(B)$, dado que hay una correspondencia biunívoca de n a $2n$ entre los elementos de los conjuntos. Dicho en otra forma, hay tantos números pares como números naturales.

Cada uno de los conjuntos *A, B, C, D, E* y *F* puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto *A*. Cada uno de dichos conjuntos es un conjunto infinito y tiene el mismo número cardinal transfinito que el conjunto de los números naturales.

Las propiedades de los conjuntos infinitos preocuparon a los matemáticos durante siglos. Una comprensión aceptable de los conjuntos infinitos no se alcanzó en realidad hasta el siglo pasado. Se ha introducido en §1-3 el símbolo $\aleph_0$ (léase "alef cero") como el número cardinal transfinito del conjunto de los números naturales. En el inciso 5-1 consideraremos algunas propiedades de los números cardinales transfinitos y algunas de sus aparentes paradojas.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 4-3

Establézcanse todas las posibles correspondencias biunívocas entre los elementos de los dos siguientes conjuntos:

1. $\{1, 2\}$ y $\{p, q\}$.

2. $\{1, 2, 3\}$ y $\{x, y, z\}$.

3. $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{r, e, s, t\}$.

Describir un conjunto cuyo número cardinal sea:

4. 5 **5.** 6

6. 7 **7.** 0

Determinar el número cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:

8. $\{\triangle, >, =, \square\}$ **9.** $\{3, 5, 7\}$

10. $\{x\}$ **11.** $\{11, 12, \ldots, 18\}$

12. $\{6\}$ **13.** $\varnothing$

14. Dar un conjunto que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales.

15. Dar un conjunto que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números pares.

16. Considerando el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ determinar un conjunto que sea **(a)** equivalente e idéntico (igual a *A*; **(b)** equivalente pero no igual a *A*.

17. Establecer si o no: (a) dos conjuntos iguales cualesquiera son necesariamente equivalentes; (b) dos conjuntos equivalentes cualesquiera son necesariamente iguales.

Establecer una correspondencia biunívoca entre:

18. El conjunto de los números naturales del 4 al 8 y el conjunto de las vocales del alfabeto.

19. El conjunto de las vocales del alfabeto y el conjunto de los números pares menores o iguales a 10.

20. El conjunto de los números naturales mayores que 100 y el conjunto de todos los números naturales.

*21. El conjunto de los enteros impares positivos y el conjunto de los enteros positivos múltiplos de 5.

4-4 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Consideremos dos conjuntos A y B definidos como sigue:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$B = \{2, 5, 7, 8, 9\}$$

A partir de esos dos conjuntos formemos otro conjunto C cuyos elementos sean los que aparecen simultáneamente en los dos conjuntos dados:

$$C = \{2, 5, 7\}$$

El conjunto C que consta de los elementos que son comunes a los conjuntos A y B, recibe el nombre de **intersección** de los conjuntos A y B. Formalmente se dice que la intersección de dos conjuntos A y B (que se escribe $A \cap B$) es el conjunto de los elementos que son elementos comunes a los dos conjuntos dados.

EJEMPLO 1: Si $A = \{a, r, e\}$ y $B = \{c, a, t\}$, determinar $A \cap B$.

Solución: $A \cap B = \{a\}$; es decir, a es la única letra que es común a los dos conjuntos dados.

EJEMPLO 2: Si $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $Y = \{4, 5, 6, 7\}$, determinar $X \cap Y$.

Solución:

$$X \cap Y = \{4, 5\}.$$

EJEMPLO 3: Si $X = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{4, 5, 6\}$ determinar $X \cap Y$.

Solución: Los conjuntos X y Y no tienen ningún elemento en común y se dice que son disjuntos su intersección es el conjunto nulo. Podemos, pues, escribir $X \cap Y = \varnothing$.

A partir de los dos conjuntos A y B dados en este inciso, formemos ahora otro conjunto D, cuyos elementos sean aquellos que lo son al menos de uno de los dos conjuntos dados:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

El conjunto D recibe el nombre de **unión** de los conjuntos A y B. De un modo formal se dice que la unión de dos conjuntos A y B (que se escribe $A \cup B$) es el conjunto de los elementos que son elementos de al menos uno de los conjuntos dados.

EJEMPLO 4: Supongamos que A representa al conjunto de los nombres de los muchachos de un cierto comité, $A = \{$Juan, Pedro, José$\}$. Supongamos que B representa al conjunto de los nombres de los muchachos de otro comité, $B = \{$Pedro, Antonio, José$\}$. Determinar $A \cup B$.

Solución: $A \cup B = \{$Juan, Pedro, Antonio, José$\}$. En este caso, la unión de los dos conjuntos es el conjunto de los nombres de los muchachos que están al menos en uno de los dos comités. Obsérvese que los nombres Pedro y José aparecen sólo

una vez en el conjunto $A \cup B$ pese a que dichos nombres aparecen en ambos comités.

EJEMPLO 5: Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 5, 7, 9\}$, determinar $A \cup B$.

Solución:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}.$$

EJEMPLO 6: Sean $U = \{1, 2, 4, \ldots, 10\}$; $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Enumerar los elementos de $A' \cap B'$.

Solución: $A' = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $B' = \{1, 2, 8, 9, 10\}$ y $A' \cap B' = \{8, 9, 10\}$.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 4-4

Para cada uno de los siguientes conjuntos, enumérense los elementos de **(a)** $A \cup B$; **(b)** $A \cap B$.

1. $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 3, 5, 7\}$.

2. $A = \{3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$.

3. $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{7, 9\}$.

4. $A = \{2, 4, 6, 8\}$; $B = \{4, 6, 7, 8\}$.

5. $A = \{1, 5, 10\}$; $B = \{3, 7, 8\}$.

6. $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$; $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$.

7. $A = \varnothing$; $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

8. $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $B = \{1, 3, 5, \ldots\}$.

Para cada uno de los siguientes conjuntos universales, enumérense los elementos de **(a)** A'; **(b)** B'; **(c)** $A' \cup B'$; **(d)** $A' \cap B'$:

9. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 3, 5\}$.

10. $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$; $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

11. $U = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$; $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$.

12. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $A = \varnothing$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

13. $U = \{1, 2, 3\}$; $A = \{1\}$; $B = \{3\}$.

14. $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$; $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

En los Ejercicios del 15 al 20, considérese $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$; $B = \{2, 4, 5, 9, 10\}$. *Enumérense los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:*

15. $A' \cap B'$ **16.** $(A \cup B)'$

17. $A' \cup B$ **18.** $(A' \cap B)'$

19. $A \cap B$ **20.** $(A \cup B')'$

21. Si $A \subseteq B$, definir (a) $A \cap B$; (b) $A \cup B$; (c) $A \cap B'$; (d) $A' \cup B$.

22. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, definir (a) $A \cup B$; (b) $A \cap B$; (c) $A \cap B'$; (d) $A' \cup B$.

4-5 CONJUNTOS DE PUNTOS

Las relaciones entre conjuntos se representan con frecuencia mediante conjuntos de puntos. Por ejemplo, podemos representar el conjunto universal U como un conjunto de puntos de una recta, un conjunto A como el subconjunto de U sombreado y el conjunto A' como los puntos restantes de U.

U A A′

Los dos conjuntos de puntos que por lo general se utilizan para representar conjuntos de elementos son regiones rectangulares y circulares como las que se muestran en la siguiente figura.



Rectangular region



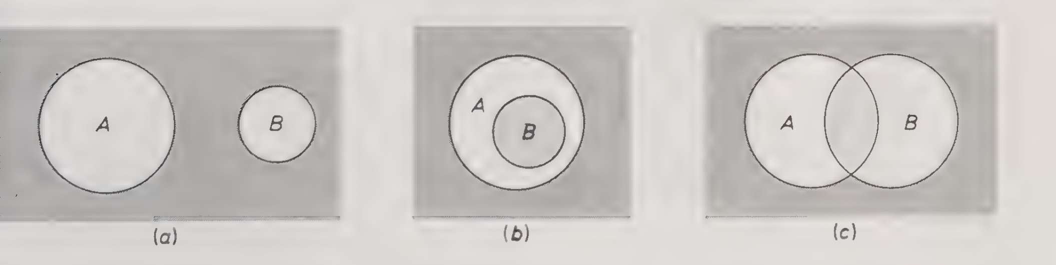
Circular region

Las regiones rectangulares y circulares pueden introducirse formalmente, pero aquí nos limitaremos a considerarlas como los conjuntos de puntos que un niño pintaría al colorear los puntos de un rectángulo (o circunferencia) y sus puntos interiores. Dado que no hay confusión en cuanto a los puntos de que se trata, no nos detendremos a considerar definiciones formales.

Utilizaremos regiones rectangulares para representar conjuntos universales y por lo general sombrearemos las regiones en consideración. Como en el caso de A', se utilizará una línea punteada para la parte de la frontera de una región que no pertenece a la región.

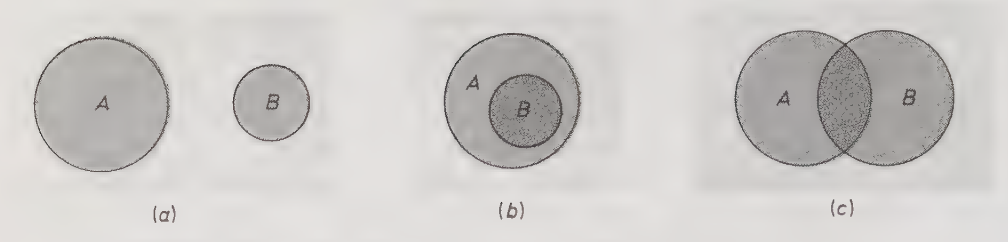


Cuando el significado es claro sin necesidad de sombreado, es frecuente el omitirlo. Estas figuras reciben el nombre de **diagramas de Euler** y se utilizan para hacer ver la intersección de dos conjuntos.



(a) (b) (c)

Obsérvese que en la Figura (a) $A \cap B$ es el conjunto vacío; en la Figura (b) $A \cap B = B$. Se utilizan también los diagramas de Euler para hacer ver la unión de dos conjuntos. Obsérvese que en la Figura (b) $A \cup B = A$.



(a) (b) (c)

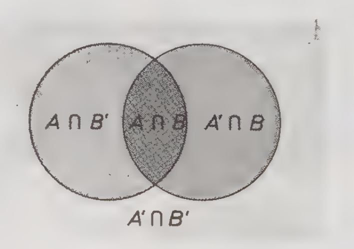
Las figuras para la intersección y unión pueden también utilizarse para ilustrar las siguientes propiedades de dos conjuntos cualesquiera A y B:

$$(A \cap B) \subseteq A \qquad (A \cap B) \subseteq B$$
$$A \subseteq (A \cup B) \qquad B \subseteq (A \cup B)$$

Al considerar sólo conjuntos bien definidos (§4-1), cada elemento del conjunto universal U pertenece ya sea al conjunto A o al conjunto A'. Cuando se consideran dos conjuntos A y B, un elemento de U pertenece a uno de los cuatro siguientes conjuntos:

$A \cap B$, es decir, ambos A y B;
$A \cap B'$, es decir, A y no B;
$A' \cap B$, es decir, B y no A;
$A' \cap B'$, es decir, ni A ni B.

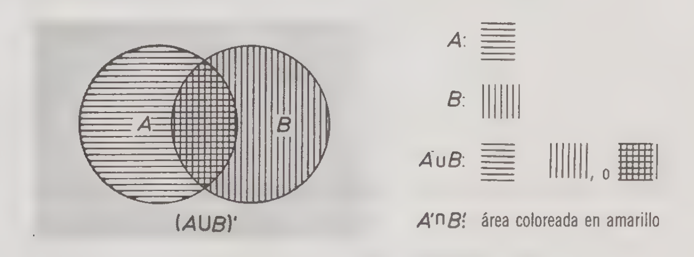
Un diagrama de Euler en el que se representen cada una de esas cuatro regiones recibe el nombre de **diagrama de Venn.**



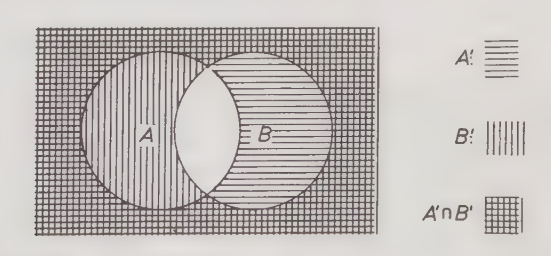
Los diagramas de Venn pueden utilizarse para hacer ver que dos conjuntos hacen referencia al mismo conjunto de puntos; es decir, que son iguales.

EJEMPLO 1: Demostrar por medio de un diagrama de Venn que $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Solución: Se hacen por separado diagramas de Venn para $(A \cup B)'$ y $A' \cap B'$. El diagrama para $(A \cup B)'$ se ha hecho rayando horizontalmente la región para A y verticalmente la región para B; la región para $A \cup B$ consta de los puntos de las regiones que están rayadas en cualquiera de las formas (horizontal, vertical o ambas, horizontal y vertical); por último, se identifica la región para $(A \cup B)'$ como el conjunto de puntos de la región sin ningún rayado horizontal o vertical.

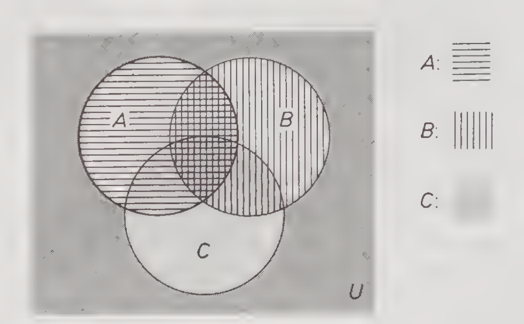


El diagrama para $A' \cap B'$ se ha hecho rayando horizontalmente la región para A' y verticalmente la región para B'; se identifica la región para $A' \cap B'$ como el conjunto de todos los puntos de las regiones rayadas en ambos sentidos, vertical y horizontal.



La solución se concluye al observar que la región para $(A \cup B)'$ en el primer diagrama de Venn es idéntica a la región para $A' \cap B'$ en el segundo diagrama de Venn; los dos conjuntos tienen los mismos elementos y por consiguiente son iguales.

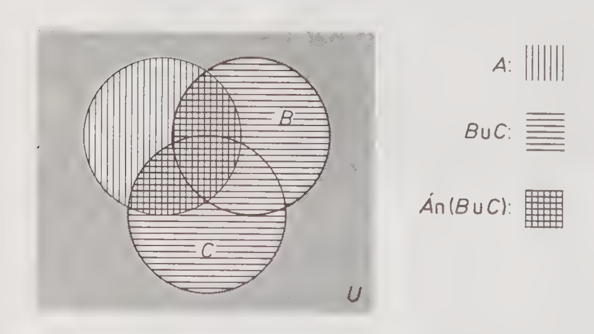
También se pueden utilizar los diagramas de Venn para tres conjuntos. En este caso hay ocho regiones que deben incluirse, dibujándose la figura por lo general como sigue:



En los dos siguientes ejemplos y en los Ejercicios del 19 al 28 se consideran diagramas de Venn para tres conjuntos.

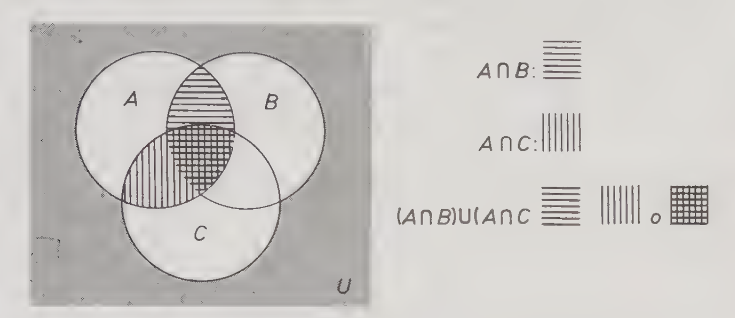
EJEMPLO 2: Demostrar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Solución: El conjunto A está rayado con líneas verticales; $B \cup C$ está rayado con líneas horizontales. La intersección de dichos conjuntos, $A \cap (B \cup C)$, es el subconjunto de U que aparece sombreado con líneas tanto horizontales como verticales.



El conjunto $A \cap B$ aparece rayado con líneas horizontales; $A \cap C$ aparece rayado con líneas verticales. La unión de di-

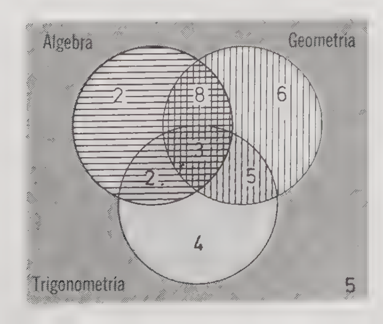
chos conjuntos es el subconjunto de U que aparece rayado con líneas en una o en ambas direcciones.



Obsérvese que el resultado final en los dos diagramas, es el mismo, lo cual demuestra la equivalencia de $A \cap (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

EJEMPLO 3: En un grupo de 35 estudiantes, 15 estudian álgebra, 22 estudian geometría, 14 estudian trigonometría, 11 estudian álgebra y geometría, 8 estudian geometría y trigonometría, 5 estudian álgebra y trigonometría y 3 estudian las tres materias. De dichos estudiantes, ¿cuántos no estudian ninguna de esas materias? ¿Cuántos estudian sólo geometría?

Solución: Este problema puede resolverse fácilmente por medio de un diagrama de Venn con tres círculos que representen al conjunto de estudiantes de cada una de las materias. Es conveniente empezar considerando que hay 3 estudiantes que estudian las tres materias. Escribimos el número 3 en la intersección de los tres círculos. Después, volviendo hacia atrás, dado que 5 estudiantes cursan álgebra y trigonometría, tendrá que haber 2 en la región que representa al álgebra y trigonometría pero *no* a la geometría. Continuando de dicho modo, los datos aparecerán tal como se muestra en el siguiente diagrama:

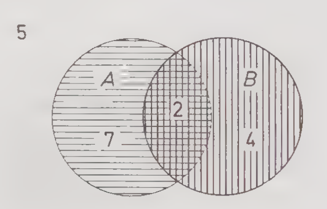


Dado que el total de los números en las diversas regiones es 30, habrá 5 estudiantes que no aparecen en ninguna de ellas y por consiguiente, son 5 los estudiantes que no cursan ninguna de las materias propuestas. De igual modo, se determina directamente en la figura que hay 6 estudiantes que sólo estudian geometría.

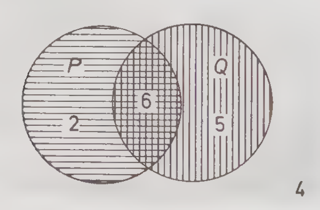
EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 4-5

Considerando el siguiente diagrama determinar:

1. (**a**) $n(A \cap B)$ (**b**) $n(A)$
(**c**) $n(B \cap A')$ (**d**) $n(B \cup A)$



2. (**a**) $n(P \cup Q)$ (**b**) $n(P' \cap Q')$
(**c**) $n(P' \cup Q)$ (**d**) $n(P \cup Q')$



Hacer un diagrama de Euler para representar:

3. $A \subset B$

4. A y B son conjuntos disjuntos.

5. $A \cup B$ cuando $A \cap B = \varnothing$.

6. $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

7. $(A \cup B)'$ cuando A y B son conjuntos disjuntos.

8. $(A \cup B \cup C)'$ cuando A, B y C son conjuntos disjuntos.

Hacer un diagrama de Venn para representar:

9. $A' \cup B$ **10.** $A' \cap B$

11. $A \cap B'$ **12.** $A \cup B'$

Hacer un diagrama de Venn para demostrar que:

13. $A \cup B = B \cup A$ **14.** $A \cap B = B \cap A$

15. $(A \cap B) \subseteq A$ **16.** $A \subseteq (A \cup B)$

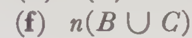
17. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ **18.** $A \cup B' = (A' \cap B)'$

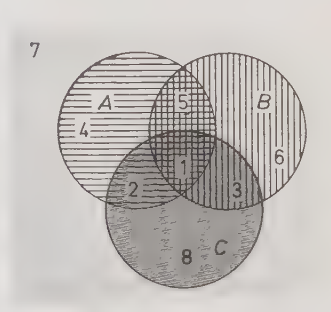
Considerar el siguiente diagrama y determinar:

19. **(a)** $n(A \cap B \cap C)$ **(b)** $n(A \cap B \cap C')$

(c) $n(A \cap B' \cap C')$ **(d)** $n(A)$

(e) $n(A \cup B)$ **(f)** $n(B \cup C)$

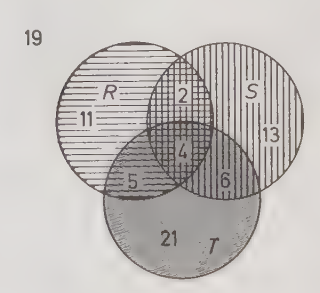




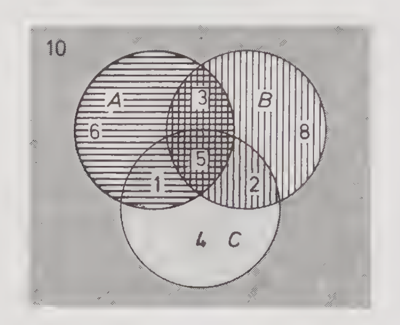
20. **(a)** $n(R' \cap S \cap T)$ **(b)** $n(R')$

(c) $n(R' \cup S)$ **(d)** $n(S' \cup T')$

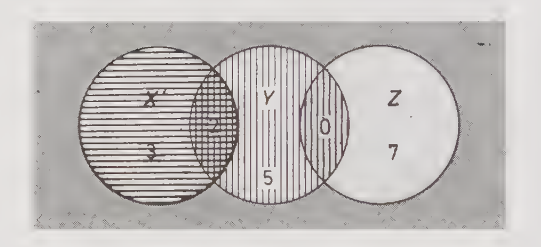
(e) $n(R' \cup S' \cup T')$ **(f)** $n(R \cup S' \cup T)$



21. (**a**) $n(A \cup B)$ (**b**) $n(B \cap C)$
(**c**) $n(A \cap B')$ (**d**) $n(A \cup B \cup C)$
(**e**) $n(A \cup B' \cup C')$ (**f**) $n(A \cap B' \cap C')$



22. (**a**) $n(X \cup Y)$ (**b**) $n(X \cup Z)$
(**c**) $n(X')$ (**d**) $n(X \cup Y')$
(**e**) $n(X' \cap Y \cap Z)$ (**f**) $n(X \cap Y' \cap Z')$



Utilizar diagramas de Venn para resolver cada uno de los siguientes problemas:

23. De un grupo de 50 estudiantes de biología, física y química se ha levantado el siguiente censo: 19 estudian biología, 19 física, 20 química, 7 física y química, 8 biología y química, 9 biología y física y 5 estudian las tres materias. ¿Cuántos alumnos del grupo no estudian ninguna de las tres materias? ¿Cuántos estudian solo química? ¿Cuántos estudian física y química pero no biología?

24. Se levantó un censo sobre 30 personas pertenecientes a tres diferentes asociaciones, A, B y C. Demuestre que el siguiente censo es inconsistente: 18 pertenecen a A, 10 a B, 9 a C, 3 a B y C, 6 a A y B, 9 a A y C, 2 a A, B y C.

Utilizar un diagrama de Venn para representar:

25. **(a)** $A \cap B \cap C$ **(b)** $A \cap B \cap C'$
(c) $A \cap B' \cap C$ **(d)** $A \cap B \cap C'$

26. **(a)** $A' \cap B \cap C$ **(b)** $A' \cap B \cap C'$
(c) $A' \cap B' \cap C$ **(d)** $A' \cap B' \cap C'$

Utilizar diagramas de Venn para demostrar que:

27. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

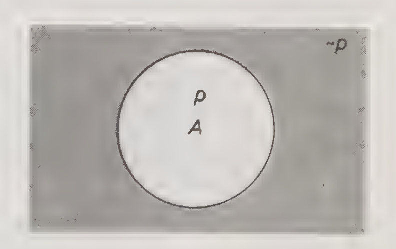
28. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4-6 CONJUNTOS DE PROPOSICIONES

Lo que caracteriza a una proposición es el hecho de ser, o bien *verdadera,* o bien *falsa.* Cada una de las siguientes es un ejemplo de una **proposición simple:**

Hoy es viernes en Chicago
Es un día de sol.

Obsérvese que una orden como, por ejemplo, "levántese y cuente" no es ni verdadera ni falsa y no se considera como una proposición en el sentido en que aquí se aplica a la palabra. Esta restricción a las proposiciones corresponde a la restricción hecha a los conjuntos definidos del inciso 4-1 y al empleo de los conjuntos A y A' en el inciso 4-5. Por lo demás, es costumbre utilizar diagramas de Euler para representar casos en los que una proposición p es verdadera.



Una **proposición compuesta** se forma combinando dos o más proposiciones simples, como por ejemplo:

Hoy es viernes en Chicago y es un día de sol.

En el ejemplo anterior, las dos proposiciones simples están combinadas por medio de la conjunción "y". Se pueden utilizar otras conjunciones. Consideremos las mismas proposiciones simples utilizando la conjunción "o":

Hoy es viernes en Chicago o es un día de sol.

Consideremos tales proposiciones compuestas y determinaremos las condiciones bajo las que son verdaderas o falsas, suponiendo previamente que las proposiciones simples son verdaderas. Con tal fin utilizaremos letras o variables para representar las proposiciones y símbolos para representar las conjunciones. Por ejemplo, utilizaremos p y q para representar las siguientes proposiciones simples:

p: Hoy es viernes en Chicago
q: Es un día de sol

Las siguientes son conjunciones que usualmente se emplean:

$\wedge$: y
$\vee$: o
$\sim$: no

Podemos utilizar p y q como previamente se han definido y escribir las siguientes proposiciones en forma simbólica junto con su traducción al lenguaje llano:

$p \wedge q$: Hoy es viernes en Chicago y es un día de sol.
$p \vee q$: Hoy es viernes en Chicago o es un día de sol.
$\sim p$: Hoy no es viernes en Chicago.

EJEMPLO 1: Traducir $p \wedge (\sim p)$ siendo p y q las proposiciones definidas más arriba.

Solución: Hoy es viernes en Chicago y no es un día de sol.

EJEMPLO 2: Escribir en forma simbólica: Hoy no es viernes en Chicago o no es un día de sol.

Solución: $(\sim p) \vee (\sim q)$.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 4-6

1. Utilícese p: Juan es alto; q: Pedro es bajo. Piénsese en "bajo" como "no alto"; escríbase cada una de las siguientes proposiciones en forma simbólica:

(a) Juan es bajo y Pedro es alto.
(b) Ni Juan ni Pedro son altos.
(c) Juan no es alto y Pedro es bajo.
(d) No es verdad que Juan y Pedro son ambos altos.
(e) O Juan es alto o Pedro es alto.

2. Considérese que Pedro y Juan son ambos altos. ¿Cuáles de las proposiciones del Ejercicio 1 son verdaderas?

3. Utilícese p: Ana es feliz; q: María es infeliz. Considérese "infeliz" como "no feliz"; escríbanse las siguientes proposiciones en forma simbólica:

(a) Ana y María son ambas felices.
(b) O Ana es feliz o María es feliz.
(c) Ni Ana ni María son felices.
(d) No es verdad que Ana y María sean ambas felices.
(e) No es verdad que ni Ana ni María son felices.

4. Considérese que Ana y María son ambas felices. ¿Cuáles de las proposiciones del Ejercicio 3 son verdaderas?

5. Utilícese p: Me gusta este libro; q: Me gustan las matemáticas. Tradúzcanse a lenguaje llano las siguientes proposiciones:

(a) $p \wedge q$
(b) $\sim q$
(c) $\sim p$
(d) $(\sim p) \wedge (\sim q)$

6. Procédase con las siguientes proposiciones como en el Ejercicio **5**:

(a) $(\sim p) \wedge q$
(b) $p \vee q$
(c) $\sim(p \wedge q)$
(d) $\sim[(\sim p) \wedge q]$

7. Considérese que le gusta este libro y le gustan las matemáticas. ¿Cuáles de las proposiciones de los Ejercicios 5 y 6 son verdaderas?

8. Considérese que le gusta este libro pero que no le gustan las matemáticas. ¿Cuáles de las proposiciones de los Ejercicios 5 y 6 son verdaderas?

***9.** Considérese que dos proposiciones dadas p y q son ambas verdaderas. Indíquese si son verdaderas o no cada una de las siguientes proposiciones:

(a) $p \wedge q$ **(b)** $p \vee q$
(c) $p \vee (\sim q)$ **(d)** $(\sim p) \vee q$

***10.** Repítase el Ejercicio 9 considerando que p es verdadera y q puede ser verdadera o falsa.

4-7 VALORES VERITATIVOS DE LAS PROPOSICIONES

Consideremos primero la **negación** ($\sim p$) de una proposición p. Ya se ha hecho mención del símbolo en la última sección.

Según se desprende del significado de la palabra "negación" si p es verdadero, entonces $\sim p$ es falso; si p es falso, entonces $\sim p$ es verdadero. Los valores veritativos de la proposición $\sim p$ se dan en la siguiente **tabla veritativa** en la que *V* representa a "verdadero" y *F* representa a "falso":

p	$\sim p$
T	F
F	T

Consideremos ahora las siguientes proposiciones simples:

p: Está nevando.
q: Es el mes de diciembre.

La verdad de cualquier proposición compuesta, como por ejemplo $p \wedge q$, depende de la verdad de cada una de esas proposiciones simples. Dado que cada una de esas proposiciones p y q puede ser verdadera o falsa, se presentan cuatro posibilidades distintas.

p verdadera q verdadera
p verdadera q falsa

p falsa $\quad$ q verdadera
p falsa $\quad$ q falsa

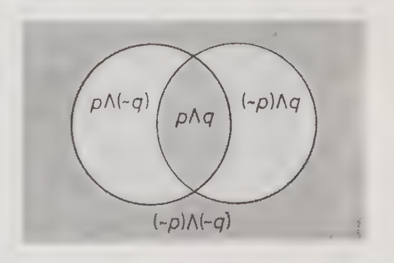
Para cada una de esas posibilidades se pretende determinar el valor veritativo de la proposición $p \wedge q$. Cuando decimos que $p \wedge q$ es verdadero, estamos diciendo que ambas p y q son verdaderas. Podemos definir los valores veritativos de $p \wedge q$ por medio de la siguiente tabla:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

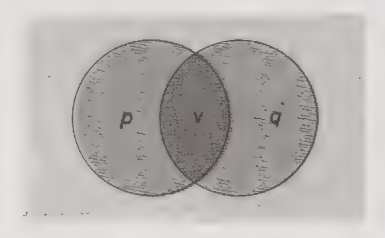
La proposición $p \wedge q$ recibe el nombre de **conjunción** de p y q. Los valores veritativos de $p \wedge q$ son independientes del *significado* asignado a las variables. Por ejemplo, si estamos considerando que cada una de las dos proposiciones simples es verdadera, se deduce de inmediato que la conjunción de dichas proposiciones también es verdadera; en cualquier otra circunstancia, se deduce que la conjunción de las proposiciones es falsa.

Pueden utilizarse diagramas de Venn para representar los valores veritativos de dos proposiciones, considerando el conjunto A de los casos en los que p es verdadero, etiquetado p, y el conjunto B en el que q es verdadero, etiquetado q.

Al igual que en §4-5 se tienen cuatro posibles regiones. Dichas regiones corresponden a las cuatro posibilidades de verdad y falsedad de dos proposiciones generales (o a los cuatro renglones de la tabla veritativa), pudiéndose representar mediante conjunciones de proposiciones. Obsérvese la semejanza entre los significados de $\wedge$ para proposiciones y $\cap$ para conjunto.



Ahora consideraremos la proposición compuesta $p \vee q$, llamada **disyunción** de p y q. Traducimos "$\vee$" como "o" no obstante que empleemos la palabra "o" de un modo más preciso que en el lenguaje ordinario. Tal como la empleamos aquí, "p o q" significa que una al menos de las proposiciones p o q es verdadera; es decir, o bien p es verdadera, o q es verdadera o ambas p y q son verdaderas. En otras palabras, el significado de $\vee$ para las proposiciones corresponde al significado de $\cup$ para los conjuntos.



Los valores veritativos de $p \vee q$ se definen en la siguiente tabla:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

De la tabla se deduce que la proposición compuesta $p \vee q$ es verdadera a menos que p y q sean ambos falsos.

Se pueden utilizar tablas veritativas para resumir los valores veritativos de varias proposiciones compuestas. A fin de ilustrar el procedimiento construiremos una tabla veritativa para la proposición $p \wedge (\sim p)$.

Primero hagamos una tabla con los encabezados apropiados como sigue:

p	q	p	$\wedge$	$(\sim q)$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

Ahora completemos la columna encabezada por "p" utilizando los valores veritativos que aparecen bajo p en la primera columna. En la columna encabezada por "$\sim q$" escríbase la negación de los valores dados bajo q en la segunda columna. (¿Por qué?). La tabla aparece ahora en la siguiente forma:

p	q	p	$\wedge$	$(\sim q$
T	T	T		F
T	F	T		T
F	T	F		F
F	F	F		T

Finalmente se determinan las conjunciones de los valores dados en la tercera y quinta columna. La tabla completa aparece como sigue, con el orden en que las columnas fueron consideradas, indicado por (a), (b) y (c) y señalando en negrillas los resultados finales:

p	q	p	$\wedge$	$(\sim q)$
T	T	T	**F**	F
T	F	T	**T**	T
F	T	F	**F**	F
F	F	F	**F**	T
		(a)	(c)	(b)

Podemos resumir lo anterior diciendo que la proposición $p \wedge (\sim q)$ es verdadera sólo en el caso en que p es verdadera y q falsa. Por consiguiente, la proposición "Hoy es miércoles y no está nevando" es una proposición verdadera un caluroso miércoles de Julio. (Consideramos, claro está, que no nevará un caluroso día de Julio.)

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 4-7

Construir tablas veritativas para:

1. $(\sim p) \wedge q$ **2.** $(\sim p) \vee q$

3. $(\sim p) \vee (\sim q)$

4. $(\sim p) \wedge (\sim q)$

5. $\sim(p \wedge q)$

6. $p \vee (\sim q)$

Copiar y completar cada una de las siguientes tablas veritativas:

7.

p	q	$\sim$	$[p$	$\vee$	$(\sim p)]$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				
		(d)	(a)	(c)	(b)

8.

p	q	$\sim$	$[(\sim p)$	$\vee$	$q]$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				
		(d)	(a)	(c)	(b)

9.

p	q	$\sim$	$[(\sim p)$	$\wedge$	$(\sim q)]$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				
		(d)	(a)	(c)	(b)

10.

p	q	$\sim$	$[(\sim p)$	$\vee$	$(\sim q)]$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				
		(d)	(a)	(c)	(b)

11. Defínase $p \veebar q$ como "p o q pero no ambas" y constrúyase una tabla veritativa para dicha conjunción.

12. Constrúyase una tabla veritativa para $p \mid q$ que se define como verdadera cuando p y q son ambas verdaderas y como falso en cualquier otro caso.

13. En el Ejercicio 12, expresar $p \mid q$ en términos de las otras conjunciones que previamente hemos definido.

14. Utilizar p para "me gusta este libro" y q para "me gustan las matemáticas". Díganse las condiciones bajo las que cada una de las proposiciones de los Ejercicios del 1 al 6 son verdaderas.

4-8 PROPOSICIONES CONDICIONALES

Muchas de las proposiciones que hacemos en la conversación coti-

diana están sujetas a cierta condición. Por ejemplo, consideremos las siguientes:

Si brilla el sol, entonces cortaré el césped.
Si no tengo tarea, entonces iré a jugar.
Si me decido a estudiar, entonces pasaré el curso.

Cada una de esas proposiciones se expresa en la forma *si-entonces:*

Si p, entonces q.

Cualquier proposición de la forma si-entonces puede expresarse simbólicamente como sigue:

$$p \rightarrow q,$$

que se lee ya sea como "si p, entonces q" o como "p implica q". El símbolo "$\rightarrow$" se llama **símbolo de implicación;** es una conjunción que se emplea para formar una proposición compuesta llamada **proposición condicional.**

Nuestro primer propósito es considerar las diversas posibilidades para p y q a fin de definir $p \rightarrow q$ para cada uno de los casos. Una de las formas de hacerlo sería el presentar una tabla de verdad completa y aceptarla como la definición de $p \rightarrow q$. Justifiquemos, sin embargo, previamente las componentes de esa tabla. Consideremos nuevamente la proposición condicional:

Si brilla el sol, entonces cortaré el césped.

Ahora, si el sol brilla y corto el césped, entonces es obvio que la proposición es verdadera. Por el contrario, la proposición es falsa si el sol brilla y no corto el césped. Consideremos ahora que el sol no brilla; entonces, corte o no corte el césped, la proposición original es verdadera en el sentido que sólo se declaró una intención bajo la condición de que el sol brille. Podemos resumir esas aseveraciones por medio de una tabla veritativa:

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Consideremos la proposición

Si llueve, entonces le llevaré a su casa.

En qué caso le miento:

1. ¿Si está lloviendo y le llevo a su casa?
2. ¿Si está lloviendo y no le llevo a su casa?
3. ¿Si no está lloviendo y le llevo a su casa?
4. ¿Si no está lloviendo y no le llevo a su casa?

De acuerdo al significado aceptado de las palabras empleadas. tiene derecho a considerarse engañado sólo si está lloviendo y no le llevo a su casa.

Muchas personas se desconciertan respecto de algunos de los valores veritativos de $p \to q$. De hecho hace falta especificar los valores (V o F) veritativos que corresponden a la proposición condicional para cada una de las cuatro posibles combinaciones de los valores veritativos para p y q. Entonces, la única cuestión discutible será:

¿Bajo qué condiciones una proposición de la forma
$p \to q$ puede considerarse como una proposición verdadera?

En otras palabras, nos atenemos al uso de las palabras en la lengua castellana. Si pretendemos comunicarnos con otras personas, debemos aceptar las definiciones de los significados de las palabras que utilizamos. El significado aceptado de $p \to q$ está dado en la tabla veritativa. Se podrían haber utilizado otros significados para los símbolos, pero, una vez aceptado dicho significado, si queremos dar otro significado a una proposición compuesta en términos de p y q tendremos que emplear algún otro símbolo.

EJEMPLO 1: Dar el valor veritativo de cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Si $5 + 7 = 12$, entonces $6 + 7 = 13$
(b) Si $5 \times 7 = 35$, entonces $6 \times 7 = 36$
(c) Si $5 + 7 = 35$, entonces $6 + 7 = 13$
(d) Si $5 + 7 = 12$, entonces $6 \times 7 = 36$

Solución: Considérense cada una de las proposiciones en la forma $p \rightarrow q$.

(a) Para p verdadera y q verdadera, la proposición $p \rightarrow q$ es *verdadera.*
(b) Para p verdadera y q falsa, la proposición $p \rightarrow q$ es *falsa.*
(c) Para p falsa y q verdadera, la proposición $p \rightarrow q$ es *verdadera.*
(d) Para p falsa y q falsa, la proposición $p \rightarrow q$ es *verdadera.*

EJEMPLO 2: Determinar el conjunto solución para la variable real x tal que la siguiente proposición sea verdadera:

Si $3 \times 4 = 34$, entonces $x - 3 = 5$.

Solución: Considérese la proposición en la forma $p \rightarrow q$ para

$$p: 3 \times 4 = 34$$
$$q: x - 3 = 5$$

Dado que p es falso, la proposición dada es verdadera para todos los valores reales de x.

Según la tabla veritativa para $p \rightarrow q$, cualquier proposición de la forma "si p, entonces q" es falsa sólo cuando p es verdadera y q es falsa. Por otra parte, si p es falsa, entonces la proposición $p \rightarrow q$ se acepta como verdadera independientemente de los valores veritativos de q. Así, por la definición, cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas:

Si $2 + 3 = 7$, entonces Jorge Washington es el actual Presidente de los Estados Unidos.
Si $2 + 3 = 7$, entonces la luna es de queso.
Si $2 + 3 = 7$, entonces el mes de Julio sigue al mes de Junio.

Si se tiene alguna dificultad en aceptar cualquiera de esas pro-

posiciones como verdaderas, será necesario revisar la definición de los valores veritativos de las proposiciones de la forma si-entonces. Recuérdese también que no es necesario que exista alguna relación entre p y q en una proposición de la forma si-entonces, pese a que no sea ese el caso en el empleo cotidiano de tales proposiciones.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 4-8

En los Ejercicios del 1 al 4 considérense las siguientes proposiciones:

p: Estudio mucho.
q: Obtendré 10.

Traduzca ahora cada una de las siguientes proposiciones en forma simbólica a una proposición en castellano:

1. $p \rightarrow q$ **2.** $q \rightarrow p$

3. $(\sim p) \rightarrow (\sim q)$ **4.** $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$

5. Repítanse los Ejercicios del 1 al 4 para las proposiciones:

p: El triángulo es equilátero.
q: El triángulo es isósceles.

6. Determinar los valores veritativos de cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Si $2 \times 3 = 5$, entonces $2 + 3 = 6$.
(b) Si $2 \times 3 = 5$, entonces $2 + 3 = 5$.
(c) Si $2 + 3 = 5$, entonces $2 \times 3 = 5$.

7. Determinar los valores veritativos de cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Si $5 \times 6 = 56$, entonces $5 + 6 = 11$.
(b) Si $5 \times 6 = 42$, entonces $5 + 6 = 10$.
(c) Si $5 \times 6 = 42$, entonces $5 + 5 = 11$.

8. Considérese que $a \times b = c$, $b \times c = d$ y que $c \neq d$. De-

termínese entonces los valores veritativos de cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Si $a \times b = c$, entonces $b \times c = d$.
(b) Si $a \times b = d$, entonces $b \times c = c$.
(c) Si $a \times b = d$, entonces $b \times c = d$.
(d) Si $a \times b = c$, entonces $b \times c = c$.

9. Demostrar por medio de tablas veritativas que $(\sim p) \vee q$ tiene los mismos valores veritativos que $p \rightarrow q$.

10. Demostrar que $\sim[p \wedge (\sim q)]$ tiene los mismos valores veritativos que $p \rightarrow q$.

Construir las tablas veritativas para:

11. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
12. $q \rightarrow [(\sim p) \vee q]$

Copiar y completar cada una de las siguientes tablas:

13.

p	q	$[(\sim p)$	$\vee$	$q]$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					
		(a)	(c)	(b)	(e)	(d)

14.

p	q	$[(\sim p)$	$\wedge$	$q]$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					
		(a)	(c)	(b)	(e)	(d)

Determinar el conjunto solución para la variable real x tal que cada una de las siguientes proposiciones sea verdadera:

15. Si $2 + 3 = 5$, entonces $x + 1 = 8$.

16. Si $2 + 3 = 6$, entonces $x + 1 = 8$.

***17.** Si $x + 1 = 8$, entonces $2 + 3 = 5$.

***18.** Si $x + 1 = 8$, entonces $2 + 3 = 6$.

*19. Si $3 - x = 1$, entonces $2 \times 5 = 13$.

*20. Si $3 - x =$, entonces $2 \times 5 = 10$.

EXAMEN RELATIVO AL CAPITULO 4

1. Decir si los conjuntos $\{b, a, t\}$ y $\{e, a, b\}$ son **(a)** iguales; **(b)** equivalentes.

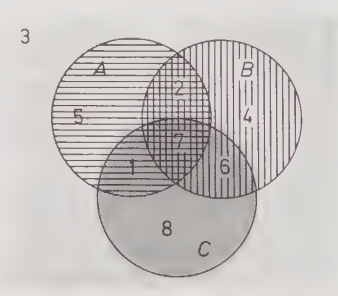
2. Sea $U = \{m, e, m, o, r, a, b, l, e\}$; enumérense los elementos de A' cuando se define A como **(a)** $\{r, e, m, o\}$; **(b)** $\{l, a, b, o, r\}$.

3. Mostrar todas las posibles correspondencias biunívocas que se pueden establecer con los elementos de los conjuntos $\{t, o, p\}$ y $\{r, a, t\}$.

4. Sean $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 3, 6\}$ y $B = \{0, 3, 6, 9\}$. Determinar:
   (a) $A' \cap B$ **(b)** $(A \cup B)'$

5. Utilizar un diagrama de Venn para representar:
   (a) $A \cap B'$ **(b)** $A' \cap B \cap C$

6. Considerando el siguiente diagrama determinar:
   (a) $n(A \cap B \cap C')$ **(b)** $n(A \cup B \cup C')$



7. Utilizando p: Juan estudia mucho y q: Pedro es vago, escribir cada una de las siguientes proposiciones en forma simbólica, considerando "es vago" como "no estudia mucho":
   (a) Ni Juan ni Pedro son vagos.
   (b) No es cierto que Juan y Pedro sean ambos vagos.

8. Considérese que Juan es vago y Pedro no lo es. ¿Cuáles de las proposiciones del Ejercicio 7 son verdaderas?

9. Copiar y completar la siguiente tabla veritativa:

p	q	$\sim$	$[(\sim p)$	$\vee$	$q]$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				
		(d)	(a)	(c)	(b)

10. Determinar el valor veritativo de cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Si $6 + 2 = 10$, entonces $7 \times 2 = 11$.
(b) Si $7 \times 2 = 10$, entonces $6 \times 2 = 12$.

Capítulo 5

CONJUNTOS DE NUMEROS

En el Capítulo 4 se consideraron conjuntos de elementos. Cuando se cuentan los elementos de un conjunto se asocia un número a dicho conjunto. El conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$ de números que se utilizan para contar recibe el nombre de conjunto de números naturales. En este capítulo se considera que el lector está familiarizado con dicho conjunto. Consideraremos propiedades de los números naturales y ampliaremos su conjunto para obtener otros conjuntos de números.

La diferencia de dos números naturales puede o no representar un número natural; $5 - 3 = 2$, pero $3 - 5$ no representa a un número natural. Ello nos lleva a ampliar el conjunto de los números a fin de incluir a todos los enteros (positivos, negativos y al cero) de tal forma que la sustracción siempre sea posible.

El cociente de dos números naturales puede o no representar un número natural; $6 \div 2 = 3$, pero $2 \div 6$ no representa a un número natural. Ello nos lleva a ampliar el conjunto de los números a fin de incluir los números racionales de tal suerte que la división, excepto por cero, siempre sea posible.

Finalmente, incluímos todos los números reales de tal suerte que todos los puntos de una recta en la geometría clásica tengan coordenada. Son posibles otras ampliaciones del conjunto de los números, pero no son necesarias para los propósitos que se considerarán aquí. En cada caso examinaremos algunas de las propiedades del conjunto de números particular que analicemos.

5-1 USOS DE LOS NUMEROS

El conjunto de los números que utilizamos al contar,

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},$$

recibe el nombre de conjunto de los *números naturales,* conjunto que ya se ha considerado en diversas secciones anteriores. Los números naturales proporcionan la base para el desarrollo de otros conjuntos de números, así como para la consideración de varios usos de los números.

Los números naturales pueden utilizarse como en §4-3 como *números cardinales* de conjuntos finitos de elementos. Los números naturales se utilizan también para asignar un orden a los elementos de un conjunto finito. Por ejemplo, se supone que la página 15 de este libro es la siguiente de la página 14. Los números utilizados para asignar un orden a los elementos de un conjunto reciben el nombre de **números ordinales.**

Los números tienen también otras aplicaciones. Por ejemplo, para el número de su licencia de manejar, para el número de su teléfono o para el número de su credencial del Seguro Social no tienen sentido ni la cardinalidad ni el orden. Tales números se utilizan únicamente como **identificación.**

Los matemáticos consideran los números como abstracciones en el mismo sentido que un color, como por ejemplo el rojo, es una abstracción. Y en esa forma abstracta les interesa el estudio de las propiedades de los números tales como la propiedad conmutativa para la adición, la propiedad asociativa para la multiplicación, la propiedad distributiva, etc. De hecho, esta consideración de los números como abstracciones pone de manifiesto el empleo o aplicaciones de los números dado que, con frecuencia, la aplicación

de una propiedad nos ayuda a la comprensión del uso de los números. Por ejemplo, la propiedad conmutativa para la multiplicación nos facilita comprender que al contar 60 elementos lo podemos hacer contando el número de docenas o el número de conjuntos de cinco (que se obtienen posiblemente por coordinación de sus elementos con los dedos de una mano). Es decir,

$$5 \times 12 = 12 \times 5.$$

A lo largo de este capítulo consideraremos conjuntos infinitos de números y sus propiedades. En secciones anteriores (§1-3, §4-3) hemos introducido el símbolo $\aleph_0$ como el número cardinal transfinito del conjunto de los números naturales. Enunciaremos ahora algunas de las propiedades aritméticas poco usuales de dicho número, para lo cual nos basaremos en los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\} \\ B &= \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\} \\ C &= \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1, \ldots\} \end{aligned}$$

1. $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$. El conjunto A tiene el número cardinal transfinito $\aleph_0$. El conjunto A, con un elemento, 0, añadido, tiene el número cardinal $\aleph_0 + 1$. La equivalencia de los dos conjuntos puede hacerse ver como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n+1, & \ldots\} \end{array}$$

2. $\aleph_0 - 5 = \aleph_0$. El conjunto A tiene el número cardinal transfinito ; el conjunto A, quitándole los números 1, 2, 3, 4, 5, tiene el número cardinal $\aleph_0 - 5$. La equivalencia de los dos conjuntos puede hacerse ver como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{6, & 7, & 8, & 9, & 10, & \ldots, & n+5, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots\} \end{array}$$

3. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Los conjuntos B y C tienen cada uno el número cardinal transfinito $\aleph_0$; la unión de dichos conjuntos tiene el número cardinal $\aleph_0 + \aleph_0$ dado que $B \cap C = \varnothing$. Sin embargo, $B \cup C = A$ y el conjunto A tiene como número cardinal $\aleph_0$.

EJEMPLO: Establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto de los números naturales y el conjunto de los números naturales pares.

Solución:

A:	$\{1,$	$2,$	$3,$	$4,$	$5,$	$\ldots,$	$n,$	$\ldots\}$
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
B:	$\{2,$	$4,$	$6,$	$8,$	$10,$	$\ldots,$	$2n,$	$\ldots\}$

El ejemplo muestra la *aparente* paradoja de que hay tantos números naturales pares como números naturales pares e impares juntos. Sin embargo, esto no es una paradoja sino uno de los casos asombrosos de la aritmética transfinita. En efecto, una de las definiciones formales de conjunto infinito establece que un conjunto infinito es un conjunto que puede ponerse en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio de sí mismo. Es decir, un conjunto que es equivalente a uno de sus subconjuntos propios es un conjunto infinito.

Permanecen sin respuesta muchas cuestiones acerca de los números transfinitos. Por ejemplo, se puede demostrar que

$$\aleph_0^{\aleph_0}$$

determina otro número cardinal transfinito, llamado $\aleph_0$, que es mayor que $\aleph_1$. El determinar si existe o no un número cardinal comprendido entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$ es un problema que se ha ocupado a los matemáticos hasta hace pocos años que todavía no está totalmente resuelto. De hecho, en cualquier momento se pueden tener noticias de más descubrimientos sobre dicho tema dado el gran número de matemáticos que hoy en día trabajan sobre ese famoso problema.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 5-1

En cada uno de los siguientes ejercicios decir si el número se utiliza como número cardinal, número ordinal o como mera identificación:

1. Este es el *primer* problema de la lista.
2. Hay 20 volúmenes de la enciclopedia.
3. La matemática se analiza en el *duodécimo* volumen.
4. La matrícula de mi coche es 319-ES
5. Dorotea está en la octava fila.
6. Hay 35 alumnos en la clase.
7. Sintonizo el 104 de FM.
8. Se necesitan 9 hombres en un equipo de beisbol.
9. Es la tercera vez que cursa la materia.
10. El libro está catalogado bajo el número 510.7.

Establecer una correspondencia biunívoca entre:

11. El conjunto de los números naturales y el conjunto de los números naturales impares.

12. El conjunto de los números naturales y el conjunto de los números naturales mayores que 25.

13. El conjunto de los números naturales pares y el conjunto de los números naturales impares.

14. El conjunto de los números naturales pares y el conjunto de los números naturales pares mayores que 100.

15. El conjunto de los números naturales impares mayores que 100, y el conjunto de los números naturales pares mayores que 100.

16. El conjunto de los números naturales impares mayores que 50 y el conjunto de los números naturales impares mayores que 150.

Clasificar cada uno de los siguientes conjuntos como finito o infinito:

17. $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$
18. $B = \{2, 4, 6, \ldots, 1000\}$
19. $C = \{2, 4, 6, \ldots, 1\,000\,000\}$

20. $D = \{1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots\}$

21. El número de habitantes del mundo.

22. El número de palabras en este libro.

23. El número de números naturales mayores que 1000.

24. El número de números naturales menores que un googol.

Aplicar una correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales para demostrar cada uno de los siguientes hechos:

25. $\aleph_0 + 2 = \aleph_0$

26. $\aleph_0 + 5 = \aleph_0$

27. $\aleph_0 - 1 = \aleph_0$

28. $\aleph_0 - 10 = \aleph_0$

5-2 NUMEROS PRIMOS

Antes de ampliar el conjunto de los números naturales a otros conjuntos, analizaremos una interesante a la vez que útil clasificación de los números naturales atendiendo a algunos de sus sobconjuntos. Previamente es necesario establecer ciertas definiciones.

El número 6 es divisible por 2 dado que existe un número 3 tal que $6 = 2 \times 3$; el número 7 no es divisible por 2 dado que no existe ningún número natural b tal que $7 = 2 \times b$. En general, un número natural n es **divisible por** un número natural t sí y sólo si existe un número natural k tal que $n = t \times k$. Si n es divisible por t, entonces n es un **múltiplo de** t y t es un **divisor de** n. Por ejemplo, 6 es un múltiplo de 2 y 2 es un divisor de 6.

Los números naturales se consideran con frecuencia en términos de los números por los que son divisibles. El conjunto

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$$

consta de los números que son divisibles por 2, es decir, los números que pueden expresarse en la forma $2k$, siendo k un número natural, El conjunto

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$$

consta de los números divisibles por 3; el conjunto

$$C = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\}$$

consta de los números divisibles por 4; el conjunto

$$D = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$$

consta de los números divisibles por 5; el conjunto

$$E = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$$

consta de los números divisibles por 6; y así sucesivamente.

Obsérvese que $C \subset A$; en otras palabras, cualquier número que es divisible por 4 es también divisible por 2. Obsérvese también que $A \cap B = E$; dicho de otra forma, el conjunto de los números que son divisibles por 6.

El número 1 divide a todos los números naturales dado que $k = 1 \times k$ para todo número natural k. Por ello, el número 1 recibe el nombre de **unidad.** Dado que el conjunto A no incluye a todos los números naturales, la divisibilidad por 2 es una propiedad particular de los elementos del conjunto A.

El número 2 es un elemento del conjunto A y no lo es de ningún otro conjunto; es decir, 2 no es divisible más que por sí mismo y por 1. Todo número natural mayor que 1 que sólo sea divisible por sí mismo y por 1 recibe el nombre de **número primo.** Así por ejemplo, 2 es primo, 3 es primo, 4 no es primo dado que 4 es divisible por 2 (es decir, 4 es elemento del conjunto A y del conjunto C), 5 es primo, 6 no es primo dado que 6 es divisible por 2 y por 3. Los números naturales mayores que 1 que no son primos reciben el nombre de **números compuestos.** Obsérvese que todo número natural mayor que 1 es o primo o compuesto. El número 1 no puede clasificarse como elemento de alguno de esos dos conjuntos.

Podríamos ampliar la lista de los conjuntos $A, B, C, D, E, F,$ a fin de identificar otros números primos, es decir, elementos que sólo pertenecen a uno y sólo uno de dichos conjuntos. No obstante, el método utilizado para seleccionar dichos conjuntos puede aplicarse al conjunto de todos los números naturales. Lo ilustraremos para el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ aplicando un método para determinar números primos que fue descubierto por Eratóstenes, matemático griego que vivió hace dos mil años. El método se conoce como la **Criba de Eratóstenes.** Se prepara primero una tabla con los números naturales del 1 al 100. Entonces determinados elementos de dicho conjunto se excluyen del siguiente modo.

El número 1 se tacha, dado que sabemos que no puede clasificarse como número primo. Se enmarca el 2, el más pequeño de

los números primos. A continuación se tachan todos los siguientes múltiplos de 2, dado que cada uno de ellos es divisible por 2 y por consiguiente no es primo. Es decir, se tachan todos los números del conjunto {4, 6, 8,. . ., 100}.

Se enmarca el 3, el siguiente número primo de la lista. A con-

~~1~~	(2)	(3)	~~4~~	(5)	~~6~~	(7)	~~8~~	~~9~~	~~10~~
(11)	~~12~~	(13)	~~14~~	~~15~~	~~16~~	(17)	~~18~~	(19)	~~20~~
~~21~~	~~22~~	(23)	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	(29)	~~30~~
(31)	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	(37)	~~38~~	~~39~~	~~40~~
(41)	~~42~~	~~43~~	~~44~~	~~45~~	~~46~~	(47)	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	(53)	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	(59)	~~60~~
(61)	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	(67)	~~68~~	~~69~~	~~70~~
(71)	~~72~~	(73)	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	(79)	~~80~~
~~81~~	~~82~~	(83)	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	(89)	~~90~~
(91)	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	(97)	~~98~~	~~99~~	~~100~~

tinuación se tachan cada uno de los sucesivos múltiplos de 3. Algunos de estos números, tales como el 6 y el 12, ya habían sido tachados dado que son múltiplos de 2. Es decir, son elementos de ambos conjuntos *A* y *B*.

El número 5 se enmarca por ser primo, excluyéndose cada quinto número después del 5. El siguiente número primo es 7, excluyéndose cada séptimo número después del 7. Obsérvese que el 49 es el primer múltiplo de 7 que no se ha excluido todavía dado que es un elemento de otro conjunto de múltiplos. El siguiente número primo es el 11. Dado que todos los múltiplos de 11 en este conjunto ya han sido eliminados, los demás números que no han sido excluidos son números primos y pueden enmarcarse.

Obsérvese que 49 es el primer número que es divisible por 7 y que no es divisible por ningún número primo menor que 7. En otras palabras, cada número compuesto menor que 7^2 tiene al menos uno de sus factores menor que 7. En forma análoga podemos observar que cada número compuesto menor que 5^2 tiene al menos uno de sus factores menor que 5. En general, *para cualquier número primo p cada número compuesto menor que p^2 tiene un número primo menor que p como factor.*

Podemos utilizar dicha propiedad para determinar si hemos eliminado todos los números compuestos de un conjunto. En el con-

junto de número{1, 2,... 100}hemos considerado los números primos 2, 3, 5 y 7. El siguiente número es 11. Por el método expuesto hemos eliminado todos los números compuestos hasta 11^2, es decir 121. En este caso particular se ha identificado el conjunto de los números primos menores que o igual a 100.

EJEMPLO 1: Enumerar el conjunto de los números primos menores que 70.

Solución: A partir de la tabla identificamos este conjunto como

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67\}$.

Ya hemos visto que todo número entero mayor que 1 o bien es un número primo o de lo contrario es un número compuesto. Ahora determinaremos que todo número natural mayor que 1 puede expresarse en forma única como el producto de sus factores primos.

Consideremos las diversas formas de factorizar 24:

$$24 = 1 \times 24$$
$$24 = 2 \times 12$$
$$24 = 3 \times 8$$
$$24 = 4 \times 6$$
$$24 = 2 \times 2 \times 6$$
$$24 = 2 \times 3 \times 4$$
$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

La última factorización en términos de los números primos 2 y 3 se podría escribir como $2 \times 3 \times 2^2$, así como en otras formas. Sin embargo, dichas formas son equivalentes dado que el producto es independiente del orden de los factores. Por consiguiente 24 puede expresarse en términos de sus factores primos en una y sólo una forma.

Uno de los medios más cómodos de determinar los factores primos de un número es el considerar los números primos

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$$

en orden y utilizar cada uno de ellos como factor tantas veces como sea posible. Así, para 24 se tendrá

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \times 12 \\ &= 2 \times 2 \times 6 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3. \end{aligned}$$

Hay quien prefiere escribir dichos pasos utilizando divisiones:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24 \\ 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ & 3 \end{array}$$

Dado que 3 es un número primo, no se requiere seguir el proceso y se tiene que $24 = 2^3 \times 3$.

EJEMPLO 2: Expresar 3850 en sus factores primos.

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3850 \\ 5 & 1925 \\ 5 & 385 \\ 7 & 77 \\ & 11 \end{array} \qquad 3850 = 2 \times 5^2 \times 7 \times 11.$$

En general, si un número natural n es mayor que 1, entonces n tiene un número primo p_1 como factor. Supongamos

$$n = p_1 n_1.$$

Si n es un número primo, entonces $n = p_1$ y $n_1 = 1$. Si n no es un número primo, entonces n_1 es un número natural mayor que 1. En dicho caso n_1 o bien es un número primo o un número compuesto. Supongamos

$$n_1 = p_2 n_2 \text{ y por lo tanto } n = p_1 p_2 n_2,$$

siendo p_2 un número primo. Como antes, si $n_2 \neq 1$, entonces

$$n_2 = p_3 n_3 \text{ y por lo tanto } n = p_1 p_2 p_3 n_3,$$

siendo p_3 un número primo. Dicho proceso lo podemos continuar hasta algún $n_k = 1$, dado que sólo existe un número finito de números naturales menores que n, teniéndose

$$n > n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_k = 1.$$

Tenemos, pues, una expresión para n como un producto de números primos:

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k$$

Dicha expresión recibe el nombre de **factorización prima** de n, es decir, la factorización de n en sus factores primos. Salvo por el orden de los factores, la factorización prima de cualquier número natural mayor que 1 es única. Es decir, *cualquier número natural mayor que 1 puede expresarse como un producto de números primos en una y sólo una forma.* Como se ha mostrado en los ejemplos, usualmente se escribe la factorización prima como el producto de potencias de números primos.

EJEMPLO 3: Determinar la factorización de 5280.

Solución:

2	5280
2	2640
2	1320
2	660
2	330
3	165
5	55
	11

$$5280 = 2^5 \times 3 \times 5 \times 11.$$

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 5-2

Sean, A = el conjunto de los números divisibles por 2, B = el conjunto de los números divisibles por 3, D = el conjunto de los números divisibles por 5, F = el conjunto de los números divisi-

bles por 12 y H = el conjunto de los números divisibles por 15. En los Ejercicios del 1 al 6 exprésese cada una de las proposiciones en términos de divisibilidad.

1. $H \subset B$ **2.** $H \subset D$

3. $B \cap D = H$ **4.** $F \subset A$

5. $F \subset B$ **6.** $F \subset (A \cap B)$

7. Enumerar los números compuestos comprendidos entre 20 y 40.

8. Mediante la Criba de Eratóstenes determínense los números primos menores o iguales a 200.

9. ¿Todo número impar es primo? ¿Todo número primo es impar?

10. Señalar una pareja de números primos que difieren en 1 y demostrar que dicha pareja es única.

11. He aquí un famoso teorema que todavía no ha sido demostrado: Todo número par mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos números primos. (Este teorema se conoce con el nombre de **conjetura de Goldbach**). Expresar cada número par de 4 a 40 inclusives como la suma de dos números primos.

12. He aquí otro famoso teorema. Dos números primos que difieren en 2 unidades, tales como 17 y 19, reciben el nombre de *números primos gemelos.* Aunque no se ha demostrado todavía, se supone que existen infinidad de pares de números primos gemelos. Encontrar un par de números primos gemelos que estén comprendidos entre **(a)** 25 y 35; **(b)** 55 y 65; **(c)** 95 y 105.

13. Un conjunto de tres números primos que difieran en 2 recibe el nombre de *terna prima.* Señalar una terna prima y explicar por qué es la única terna prima posible.

14. Se ha conjeturado, pero no se ha demostrado, que todo número impar mayor que 5 puede expresarse como la suma de tres números primos. Verifíquelo para los números 7, 9, 11, 13 y 15.

*15. ¿Cuál es el mayor número primo que hay que considerar para estar seguros de haber excluido todos los números compuestos menores que o iguales a **(a)** 200; **(b)** 500; **(c)** 1000?

Expresar cada uno de los siguientes números como el producto de dos números naturales de tantas formas diferentes como sea posible:

16. 12
17. 15
18. 18
19. 20
20. 13
21. 29

Determinar la factorización prima de cada uno de los siguientes números:

22. 76
23. 68
24. 215
25. 123
26. 738
27. 1425
28. 341
29. 818

5.3 APLICACIONES DE LA FACTORIZACION PRIMA

En muchas cuestiones de aritmética se puede aplicar con provecho el concepto de la factorización prima. Consideremos primero los distintos divisores de los números naturales. Recordemos que un número natural t se dice que es divisor de otro número natural n si y sólo si existe un número natural k tal que $n = t \times k$. Consideremos ahora el conjunto de los divisores de 12 y el conjunto de los divisores de 18:

$$12: \quad \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$
$$18: \quad \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

El conjunto de los **divisores comunes** de 12 y 18 es el que consta de los números que son a la vez divisores de 12 y de 18; es decir

$$\{1, 2, 3, 6\}.$$

El mayor elemento de este conjunto, el 6, recibe el nombre de **máximo común divisor** (M.C.D.) de los dos números. En general, el **máximo común divisor** de dos o más números naturales es el mayor número natural que es divisor de cada uno de los números dados.

Se puede utilizar la factorización prima de dos números naturales para determinar el máximo común divisor de ellos. Se expresa cada uno de los números en su factorización prima; se con-

sideran los números primos que son divisores de ambos números y se determina el producto de dichos divisores primos comunes después de elevar cada uno a la máxima potencia que divida a los dos números dados. Así por ejemplo, para $12 = 2^3 \times 3$ y $18 = 2 \times 3^2$ se tiene M.C.D. $= 2 \times 3$, es decir, 6.

EJEMPLO 1: Determinar el máximo común divisor de 60 y 5280.

Solución:

$$\begin{array}{r|r} 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad 60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Como en el Ejemplo 3 de §5-2, se tiene que $5280 = 2^5 \times 3 \times 5 \times 11$. La máxima potencia de 2 que es divisor común de 60 y 5280 es 2^2; 3 es divisor común; 5 es divisor común; (11 no es divisor común). Por lo tanto, el máximo común divisor de 60 y 5280 es $2^2 \times 3 \times 5$; es decir, 60.

EJEMPLO 2: Determinar el máximo común divisor de 3850 y 5280.

Solución:

$$3850 = 2 \times 5^2 \times 7 \times 11$$
$$5280 = 2^5 \times 3 \times 5 \times 11$$

El máximo común divisor de 3850 y 5280 es $2 \times 5 \times 11$, es decir, 110.

EJEMPLO 3: Determinar el M.C.D. de 12, 36 y 60.

Solución: Primero escribimos la factorización prima de cada número:

$$12 = 2^2 \times 3$$
$$36 = 2^2 \times 3^2$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

El M.C.D. es $2^2 \times 3$; es decir, 12.

Se puede utilizar el máximo común divisor para reducir (simplificar) una fracción. Por ejemplo,

$$\frac{60}{4880} = \frac{(2^2 \times 5) \times 3}{(2^2 \times 5) \times (2^2 \times 61)} = \frac{3}{2^2 \times 61} = \frac{3}{244}.$$

Dado que 3 es el único divisor primo del numerador y no divide al denominador, la fracción $\frac{3}{244}$ es la expresión más **reducida.** El numerador y el denominador no tienen ningún divisor primo común diciéndose entonces que son **primos entre sí.**

EJEMPLO 4: Reducir la fracción 60/168 a su mínima expresión.

Solución:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$
$$168 = 2^3 \times 3 \times 7$$

El máximo común divisor es $2^2 \times 3$.

$$\frac{60}{168} = \frac{(2^2 \times 3) \times 5}{(2^2 \times 3) \times 2 \times 7} = \frac{5}{14}$$

Volvamos ahora al concepto de múltiplo de un número. Recordemos que si un número natural t es divisor de un número natural n, entonces se dice que n es un múltiplo de t. Consideremos el conjunto de múltiplos de 12 y el conjunto de múltiplos de 18:

12: {12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, . . .}
18: {18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, . . .}

El conjunto de los **múltiplos comunes** de 12 y 18 es el que cons-

ta de los números que son múltiplos a la vez, de 12 y de 18; es decir,

$$\{36, 72, 108, \ldots\}.$$

El elemento menor de este conjunto, 36, recibe el nombre de **mínimo común múltiplo** (M.C.M.) de los números. En general, el **mínimo común múltiplo** de dos o más números naturales es el menor de los números que es múltiplo de cada uno de los números dados.

Se puede utilizar la factorización prima de dos números para determinar su mínimo común múltiplo. Se descompone cada uno de los números en sus factores primos y se determina el producto de los factores primos comunes y no comunes de los dos números que estén afectados del mayor exponente; dicho producto es el mínimo común múltiplo de los dos números considerados. Así por ejemplo, $12 = 2^2 \times 3$ y $18 = 2 \times 3^3$ teniéndose como M.C.M. $= 2^2 \times 3^2$; es decir, 36.

EJEMPLO 5: Determinar el mínimo común múltiplo de 3850 y 5820.

Solución: Como en los Ejemplos 1 y 2.

$$3850 = 2 \times 5^2 \times 7 \times 11;$$
$$5280 = 2^5 \times 3 \times 5 \times 11.$$

El mínimo común múltiplo de 3850 y 5280 es $2^5 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11$; es decir, 184 800.

EJEMPLO 6: Determinar el M.C.M. de 12, 18 y 20.

Solución: Escríbase primero la factorización prima de cada uno de los números:

$$12 = 2^2 \times 3$$
$$18 = 2 \times 3^2$$
$$20 = 2^2 \times 5$$

El M.C.M. es $2^2 \times 3^2 \times 5$; es decir, 180.

Al sumar o restar dos fracciones se utiliza el mínimo común múltiplo de los denominadores de dichas fracciones. Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de 12 y 18 es 36;

$$\frac{7}{12} + \frac{5}{18} = \frac{21}{36} + \frac{10}{36} = \frac{31}{36}$$

El resultado es irreducible dado que 31 y 36 son primos entre sí.

EJEMPLO 7: Simplificar: $\frac{37}{5280} - \frac{19}{3850}$.

Solución: Se aplica el mínimo común múltiplo tal como se determinó en el Ejemplo 5:

$$\frac{37}{5280} - \frac{19}{3850} = \frac{37}{2^5 \times 3 \times 5 \times 11} - \frac{19}{2 \times 5^2 \times 7 \times 11}$$

$$= \frac{37 \times 5 \times 7}{2^5 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11} - \frac{19 \times 2^4 \times 3}{2^5 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11}$$

$$= \frac{1295 - 912}{2^5 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11} = \frac{383}{184{,}800}$$

En el Ejemplo 7 el "simplificar" significa "efectuar la operación indicada y expresar el resultado en forma irreducible". En el caso de las fracciones "expresarlas en forma irreducible" significa "expresarla con términos tan pequeños como sea posible".

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 5-3

Expresar todos los divisores de:

1. 20
2. 24
3. 9
4. 16
5. 28
6. 48
7. 60
8. 72

Determinar la factorización prima y el M.C.D. de:

9. 68 y 76.

10. 123 y 215.

11. 76 y 1425.

12. 123 y 1425.

13. 215 y 1425.

14. 68 y 738.

15. 12, 15, y 20.

16. 18, 24, y 40.

17. 12, 18, y 30.

18. 15, 45, y 60.

Expresar los cinco primeros elementos del conjunto de los múltiplos de:

19. 7

20. 8

21. 15

22. 20

Determinar la factorización prima y el M.C.M. de:

23. 68 y 76.

24. 123 y 215.

25. 76 y 1425.

26. 123 y 1425.

27. 215 y 1425.

28. 68 y 738.

29. 12, 15, y 20.

30. 18, 24, y 40.

31. 12, 18, y 30.

32. 15, 45, y 60.

Simplificar:

33. $\frac{123}{215}$

34. $\frac{76}{1425}$

35. $\frac{11}{12} - \frac{9}{18}$

36. $\frac{5}{68} + \frac{11}{76}$

37. $\frac{7}{123} - \frac{2}{215}$

38. $\frac{41}{215} + \frac{19}{1425}$

***39.** ¿Cuál es el *menor* divisor común de dos números naturales cualesquiera?

***40.** ¿Cuál es el *mayor* múltiplo común de dos números naturales cualesquiera?

5-4 EL CONJUNTO DE LOS ENTEROS

El conjunto de los **números naturales**

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

no nos permite simplificar expresiones tales como 3-5 y 7-10. Ni tampoco nos permite determinar valores de n para los cuales sean válidas las siguientes proposiciones:

$$n + 5 = 2$$
$$7 + n = 3$$

Para que la solución de tales ecuaciones sea siempre posible y para que la sustracción también lo sea, se amplía el sistema numérico considerando puntos sobre el eje numérico situados a la izquierda del origen 0. A cada punto, que es la coordenada de un número natural n, le corresponde un punto a la izquierda del origen que está a la misma distancia de 0 que el punto de coordenada n. Se dice que la coordenada de este nuevo punto es **negativa,** escribiéndose $-n$, y se hace referencia al número que $-n$ representa como el **opuesto** de n. Así, el opuesto de 2 es -2; el opuesto de 5 es -5; diciéndose también que el opuesto de 0 es 0. También se conviene que el opuesto de -2 es 2; el opuesto de -5 es 5, etc.

Por otra parte, la suma de cualquier número y su opuesto es 0. Es decir,

$$2 + (-2) = 0;$$
$$5 + (-5) = 0;$$
$$n + (-n) = 0.$$

El conjunto formado por los números naturales n, sus negativos y el número 0 recibe el nombre de conjunto de los **enteros:**

$$\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Los números del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

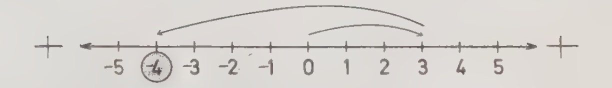
reciben el nombre de **enteros positivos** y los números del conjunto

$$\{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$$

de **enteros negativos.** Obsérvese que el cero es un entero que no es ni positivo ni negativo. Los enteros pueden representarse sobre un eje numérico de la siguiente forma:

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

Se considera que el lector tiene cierta experiencia con las cuatro operaciones fundamentales con los enteros; los ejercicios que sobre ellas se presentan, se ofrecen a título de repaso. No obstante, es conveniente examinar algunas de estas operaciones con cierto detalle. Así, veremos ahora que la sustracción es siempre posible; es decir, el conjunto de los enteros es cerrado respecto a la sustracción. Podemos dar un significado físico a la sustracción refiriéndola al eje numérico. Por ejemplo, la diferencia 3 — 7 puede considerarse como un movimiento de 3 unidades a partir del origen en sentido positivo seguido de un movimiento de 7 unidades en el sentido negativo. El punto final tiene la coordenada —4 y representa la diferencia 3 — 7.



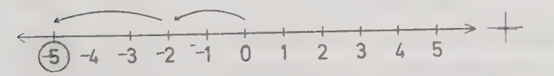
También se pueden determinar las diferencias de enteros definiendo como sigue la sustracción de dos enteros *a* y *b*:

$$a - b = a + (-b)$$

Entonces, por definición, $3 - 7 = 3 + (-7) = -4$. Esto nos permite sustituir cualquier problema de sustracción por un problema equivalente de adición. Para sustraer un número, súmese su opuesto; es decir, en el lenguaje de la regla clásica "para sustraer un número, cámbiesele el signo y súmese".

EJEMPLO 1: Graficar —2 —3 sobre un eje numérico.

Solución: Por la definición de sustracción —2 —3 puede considerarse como $-2 + (-3)$; es decir, —5. Sobre el eje numérico lo consideramos como un movimiento de 2 unidades a partir del origen en sentido negativo, seguido de un movimiento de 3 unidades también en sentido negativo.



Por lo general, las reglas para la multiplicación de enteros se han aprendido de memoria, sin que se haya visto ni comprendido la deducción de ellas. Así, todos saben que el producto de dos números negativos es un número positivo. Se sabe que el producto de un número positivo y un número negativo es un número negativo. Sin embargo, pocos son los que saben justificar tales reglas. De un modo informal podemos decir que si usted pierde $5 diarios durante dos días, entonces habrá perdido $10, es decir, $2 \times (-5) = -10$. Analicemos este producto desde un punto de vista matemático basándonos en la aplicación de la propiedad distributiva.

Obsérvese que bajo las propiedades clásicas de la adición y multiplicación

$$5 + (-5) = 0;$$
$$2 \times [5 + (-5)] = 2 \times 0 = 0;$$
$$(2 \times 5) + [2 \times (-5)] = 0 \quad \text{(por la propiedad distributiva)}$$

Dado que la suma de 2×5 y $2 \times (-5)$ es cero, cada uno de los sumandos debe ser el opuesto del otro. Entonces, dado que $2 \times 5 = 10$, $2 \times (-5) = -10$. Por otra parte, dado que $2 \times (-5) = (-5) \times 2$, se tiene también que $(-5) \times 2 = -10$. En general, para dos enteros positivos cualesquiera b y c:

$$b + (-b) = 0$$
$$c \times [b + (-b)] = c \times 0 = 0$$
$$(c \times b) + [c \times (-b)] = 0$$

Así, $c \times b$ y $c \times (-b)$ son opuestos entre sí; $c \times b = cb$ y $c \times (-b) = -cb$. Dado que $cb = bc$ y $c \times (-b) = (-b) \times c$, se tiene que $(-b) \times c = -bc$. Por consiguiente el producto de un entero positivo y un entero negativo es un entero negativo.

En forma análoga, obsérvese que bajo las propiedades clásicas de la adición y multiplicación

$$5 + (-5) = 0;$$
$$(-2) \times [5 + (-5)] = (-2) \times 0 = 0;$$
$$[(-2) \times 5] + [(-2) \times (-5)] = 0 \quad \text{(por la propiedad distributiva)}.$$

Dado que la suma de $(-2) \times 5$ y $(-2) \times (-5)$ es cero, cada uno de los sumandos tiene que ser el opuesto del otro. Entonces, dado que $(-2) \times 5 = -10$, se tiene que $(-2) \times (-5) = 10$. En general, para dos enteros positivos cualesquiera b y c:

$$b + (-b) = 0$$
$$(-c) \times [b + (-b)] = (-c) \times 0 = 0$$
$$[(-c) \times b] + [(-c) \times (-b)] = 0$$

Así, $(-c) \times b$ y $(-c) \times (-b)$ son opuestos entre sí. Por lo tanto, dado que $(-c) \times b = -cb$, se tiene que $(-c) \times (-b) = cb$. Por consiguiente el producto de dos enteros negativos es un entero positivo.

Como se puede observar en el siguiente ejemplo, el conjunto de los enteros no es cerrado respecto a la división. La necesidad de que la división siempre sea posible dará motivo, en la siguiente sección, a otras ampliaciones del sistema numérico.

EJEMPLO 2: Demostrar que el conjunto de los enteros no es cerrado respecto a la división.

Solución: Lo anterior se puede demostrar mediante un simple contra ejemplo: $8 \div 3$ no puede representarse por un entero. Es decir, no existe ningún entero n tal que $3 \times n = 8$.

Considerando el sistema matemático formado por el conjunto de los enteros y la operación de adición, podemos decir que los enteros forman un *grupo conmutativo* bajo la adición (véase §3-1), dado que el conjunto

1. Es *cerrado* respecto de la adición (la suma de dos enteros cualesquiera es un entero).
2. Es *conmutativo* respecto de la adición ($p + q = q + p$ cualesquiera que sean los enteros p y q).
3. Es *asociativo* respecto de la adición [dados tres enteros cualesquiera p, q y r se tiene que $p + (q + r) = (p + q) + r$].
4. Contiene un *elemento idéntico,* el 0, respecto de la adición.
5. Contiene un *inverso* (llamado opuesto) para cada uno de sus elementos respecto de la adición.

EJEMPLO 3: Demostrar que el conjunto de los enteros *no* forma un grupo respecto de la multiplicación.

Solución: El conjunto de los enteros es cerrado, conmutativo y asociativo respecto de la multiplicación y contiene un elemento idéntico, el 1, respecto de la multiplicación. Sin embargo, el conjunto de los enteros no contiene inversos para cada uno de sus elementos con respecto de la multiplicación. Por ejemplo, no existe ningún entero n tal que $3 \times n = 1$.

Existen un sinnúmero de demostraciones interesantes que estamos ahora en condiciones de analizar y que ilustran el tipo de razonamiento que los matemáticos aplican. Primero daremos algunas definiciones; después consideraremos algunas demostraciones y dejaremos otras como ejercicios.

Un entero es **par** si es un múltiplo de 2, es decir, si puede expresarse como $2k$, siendo k un entero. Por lo tanto el conjunto de los enteros pares es

$$\{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}.$$

Un entero que no es par se dice que es **impar**. Todo entero impar puede representarse en la forma $2k + 1$, siendo k un entero. Por lo tanto el conjunto de los enteros impares es

$$\{\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}.$$

EJEMPLO 4: Demostrar que la suma de dos enteros pares cualesquiera es un entero par.

Demostración: Dos enteros pares cualesquiera m y n pueden representarse de la forma $2k$ y $2r$, siendo k y r enteros. Entonces

$$m + n = 2k + 2r = 2(k + r),$$

donde $k + r$ representa un entero, dado que la suma de dos

enteros cualesquiera es un entero. Por lo tanto $m + n$ es un entero par.

EJEMPLO 5: Demostrar que el cuadrado de cualquier entero par es entero par.

Demostración: Todo entero par puede representarse de la forma $2k$, siendo k entero. Entonces el cuadrado del entero puede expresarse de la forma $(2k)^2$, teniéndose

$$(2k)^2 = (2k)(2k) = 2(2k^2).$$

Dado que k, k^2 y $2k^2$ representan enteros, $(2k)^2$ representa un entero par.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 5-4

Efectuar las operaciones indicadas:

1. $-8 + 5$
2. $-6 + (-7)$
3. $5 - 8$
4. $-2 - (-5)$
5. $3 \times (-7)$
6. $(-7) \times (-8)$
7. $-12 \div 3$
8. $-15 \div (-3)$
9. $-3 + [-5 + (-7)]$
10. $[-3 + (-5)] + (-7)$
11. $-2 \times [4 \times (-3)]$
12. $(-2 \times 4) \times (-3)$
13. $12 \div [6 \div (-2)]$
14. $(12 \div 6) \div (-2)$

15. Utilizando los resultados de los Ejercicios 13 y 14 hágase una conjetura acerca de la asociatividad de los enteros respecto a la división. Determínese después otro ejemplo que ayude a confirmar su conjetura.

16. Utilícese un contraejemplo para demostrar que el conjunto de los enteros no es conmutativo respecto a la sustracción.

17. ¿Cuál es la intersección del conjunto de los enteros positivos y el conjunto de los enteros negativos?

18. ¿La unión del conjunto de los enteros positivos y el conjunto de los enteros negativos es igual al conjunto de los enteros? Explique su respuesta.

19. Grafique sobre un eje numérico cada una de las siguientes diferencias: (a) $2 - 5$; (b) $-2 - 3$.

20. Hágase ver una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los enteros positivos y el conjunto de los enteros negativos.

Clasifíquese como verdadera o falsa cada una de las siguientes proposiciones:

21. Todo número natural es entero.

22. Todo entero es un número natural.

23. Todo entero es el opuesto de algún entero.

24. El conjunto de los enteros negativos es el mismo que el conjunto de los opuestos de los números enteros.

25. El conjunto de los opuestos de los enteros es el mismo que el conjunto de los enteros.

Demuéstrese cada una de las proposiciones enunciadas en los Ejercicios del 26 al 29:

26. La suma de dos enteros impares cualesquiera es par.

27. El producto de dos enteros pares cualesquiera es par.

28. El cuadrado de cualquier entero impar es impar.

*29. Si el cuadrado de un entero es impar, el entero es impar; si el cuadrado de un entero es par, el entero es par.

*30. Demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los enteros y el conjunto de los naturales.

5-5 EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES

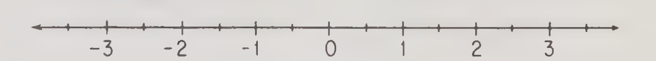
Utilizando sólo el conjunto de los enteros, no es posible simplificar expresiones tales como

$$7 \div 5,$$
$$3 \div 4.$$

Tampoco podemos determinar valores de n para los que sean válidas proposiciones como las siguientes:

$$3 \times n = 5$$
$$7 \div 2 = n$$

Para que la solución de tales ecuaciones sea siempre posible y para que la división sea siempre posible, excepto por cero, es necesario hacer una nueva ampliación del sistema numérico. Dicha ampliación la hacemos, primero, localizando puntos sobre el eje numérico que corresponden a "mitades"; es decir, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, etc., así como a sus opuestos $-\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{2}$, $-2\frac{1}{2}$, etc.



Después se localizan puntos que correspondan a los múltiplos de $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, etc., tanto positivos como negativos. Esta nueva colección de números recibe el nombre de conjunto de los números racionales. Un **número racional** es aquel que puede expresarse en la forma $\frac{a}{b}$; es decir, a/b, siendo a un número entero y b un número natural.

EJEMPLO 1: Demostrar que todo entero es un número racional.

Solución: Todo número entero n puede escribirse en la forma $\frac{n}{1}$, es decir, como el cociente de un entero entre un número natural, siendo por consiguiente un número racional. Por ejemplo, 7 puede escribirse como $\frac{7}{1}$.

Es necesario definir las condiciones bajo las que dos de los nue-

vos símbolos representan el mismo número. Obsérvese que $^6/_{12} = {}^1/_2 = {}^5/_{10}$; también $^6/_3 = {}^{18}/_9 = {}^2/_1$. En general,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si y sólo si } ad = bc.$$

La igualdad $ad = bc$ encierra sólo productos de enteros y por lo tanto sólo enteros.

Dicha definición da lugar a una regla muy útil, a saber

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk} \quad \text{para cualquier entero } k \neq 0,$$

dado que $a(bk) = b(ak)$ (si bien esta última propiedad de los enteros no se ha enunciado en forma explícita). La regla nos permite expresar un número racional en tantas formas como queramos. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \cdots.$$

La regla nos permite también "reducir" cocientes determinando factores k como en los siguientes ejemplos:

$$\frac{12}{30} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{72}{18} = \frac{4 \times 18}{1 \times 18} = \frac{4}{1}$$

$$\frac{16}{80} = \frac{1 \times 16}{5 \times 16} = \frac{1}{5}$$

Cada cociente $\frac{a}{b}$ se compone de dos partes: el **numerador** a y el **denominador** b. Se puede considerar al denominador como el número que indica la parte fraccionaria en cuestión y al numerador el que indica el número de dichas unidades. Por ejemplo, $3/4$ puede considerarse como las tres cuartas partes de la unidad (es decir, como $3 \times 1/4$).

La regla $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ implica que el numerador a y el denominador b de cualquier cociente $\frac{a}{b}$ pueden multiplicarse por un mismo número $k \neq 0$ sin que cambie el **valor** del cociente, es decir, sin que cambie el número racional que el cociente representa. Cuan-

do se considera en la forma $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$, la regla implica que el numerador y denominador pueden dividirse entre cualquier entero k que divida a ambos sin que cambie el valor del cociente. Dicha regla se utiliza para obtener la representación más conveniente de racional. Por ejemplo, se considera $\frac{1}{2}$ como el elemento representativo del conjunto

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots\right\}.$$

de igual modo, $^3/_1$ es el elemento representativo del conjunto

$$\left\{\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}, \ldots\right\}.$$

Siempre que sea posible se considera el elemento representativo que tenga la unidad como numerador o denominador. Cuando no sea posible determinar un elemento representativo que tenga a 1 como uno de sus elementos, se selecciona el elemento representativo que no tenga ningún entero k mayor que 1 que divida al numerador y al denominador. Por ejemplo, se considera $^2/_3$ como el elemento representativo del conjunto

$$\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \ldots\right\}.$$

La suma de dos números racionales cualesquiera se define como el número racional:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Por ejemplo, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 + 3}{6} = \frac{5}{6}$. Esto es consistente con el procedimiento

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}, \qquad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6},$$

que es costumbre justificar mediante la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición (ver §3-2):

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{3\times 2}+\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{1}{6}(2+3)=\frac{2+3}{6}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{1}{bd}(ad+bc)=\frac{ad+bc}{bd}$$

El negativo de un número racional $^2/_3$ puede expresarse en cual quiera de las siguientes formas:

$$-\frac{2}{3}, \qquad \frac{-2}{3}, \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{-3}$$

La forma $\dfrac{-a}{b}$ suele ser la más conveniente. Obsérvese que por la definición de la suma de dos números racionales

$$\frac{2}{3}+\frac{-2}{3}=\frac{2(3)+3(-2)}{3\times 3}=\frac{6+(-6)}{9}=\frac{0}{9}=0$$

y, en general,

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{ab+b(-a)}{b^2}=\frac{ab+(-ab)}{b^2}=\frac{0}{b^2}=0.$$

Por consiguiente, como en el caso de los enteros, se puede definir la sustracción en términos de una adición equivalente;

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}$$

El producto de dos números racionales cualesquiera se define como el número racional.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Obsérvese que $bd \neq 0$ dado que $b \neq 0$ y $d \neq 0$. Consideremos los ejemplos:

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}; \qquad \frac{4}{5}\times\frac{25}{2}=\frac{100}{10}=\frac{10}{1}=10$$

Al igual que los enteros determinan enteros al sumarse, multiplicarse o restarse, de igual modo, las sumas, los productos y las diferencias de números racionales son números racionales. Sin em-

bargo, en el conjunto de los números racionales también se obtienen números racionales al dividir por cualquier número diferente de cero. Se define el **recíproco** de cualquier número racional $\frac{a}{b}$, diferente de cero, como el número racional $\frac{b}{a}$. Obsérvese que

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1.$$

Es decir, el recíproco de un número es su inverso respecto de la multiplicación. Por lo tanto, se define la **división** en términos de una multiplicación equivalente; así pues, para cualquier $\frac{c}{d} \neq 0$,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

En otras palabras, para dividir por un número diferente de cero se multiplica por su recíproco. Esto equivale al enunciado formal de la vieja regla que dice "inviértase y multiplíquese". Dicho procedimiento puede también justificarse como sigue:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

El conjunto de los enteros es un subconjunto del conjunto de los números racionales. Por consiguiente, es de suponer que el conjunto de los números racionales tiene muchas de las propiedades que tiene el conjunto de los enteros. Así, el conjunto de los números racionales forma un grupo conmutativo bajo la adición. Es decir, respecto de la adición, el conjunto de los números racionales es cerrado, asociativo, conmutativo, contiene un elemento idéntico, 0, y contiene los inversos de cada uno de sus elementos.

Respecto de la multiplicación, el conjunto de los números racionales es cerrado, asociativo, conmutativo y contiene un elemento idéntico, 1.

Al ampliar el sistema numérico del conjunto de los enteros al conjunto de los números racionales, han quedado incluidos los inversos multiplicativos de cada elemento, excepto del 0. Así, el inverso de 3 bajo la multiplicación es $^1/_3$, y de $-^2/_3$ es $-^3/_2$. Sin

embargo, el conjunto de los números racionales no constituye un grupo bajo la multiplicación dado que el 0 no tiene inverso.

El conjunto de los números racionales tiene además una propiedad de sumo interés, a saber, la propiedad de densidad. Se dice que el conjunto de los números racionales es **denso,** porque entre dos elementos cualesquiera del conjunto existe siempre otro elemento del conjunto. El ejemplo 2 muestra cómo se pueden determinar tales números.

EJEMPLO 2: Determinar un número racional comprendido entre $^{17}/_{19}$ y $^{18}/_{19}$.

Solución: Conviértase cada una de las fracciones a otra cuyo denominador sea 38:

$$\frac{17}{19} = \frac{34}{38} \qquad \frac{18}{19} = \frac{36}{38}$$

Se puede ver que $^{35}/_{38}$ está comprendido entre las dos fracciones dadas. Obsérvese que

$$\frac{35}{38} = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{19} + \frac{18}{19}\right).$$

A partir del Ejemplo 2 se ve que siempre se podrá determinar un número racional comprendido entre dos números racionales dados, bastando para ello determinar el promedio de los dos números dados. Por otra parte, el proceso se puede continuar indefinidamente a fin de determinar tantos números racionales como se desee comprendidos entre dos números dados cualesquiera.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 5-5

Simplifíquese aplicando las definiciones de esta sección:

1. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ **2.** $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$

3. $\frac{6}{18} \times \frac{10}{7}$

4. $\frac{12}{15} \times \frac{28}{10}$

5. $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$

6. $\frac{7}{8} \div \frac{3}{4}$

7. $\frac{5}{12} \div \frac{10}{18}$

8. $\frac{17}{34} \div \frac{25}{10}$

9. $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$

10. $\frac{2}{5} - \frac{1}{4}$

11. $\frac{15}{8} - \frac{3}{4}$

12. $\frac{11}{9} - \frac{7}{5}$

Dar un ejemplo que ilustre cada uno de los siguientes enunciados:

13. La suma de dos fracciones puede ser un entero.

14. El producto de dos fracciones puede ser un entero.

15. El cociente de dos fracciones puede ser un entero.

Clasifique cada uno de los siguientes enunciados como verdadero o falso:

16. Todo entero es un número racional.

17. Todo número racional puede expresarse como un entero.

18. El conjunto de los enteros es denso.

19. El inverso multiplicativo de un número racional positivo es un número racional negativo.

20. Todo número racional tiene su inverso bajo la adición.

Cópiese la siguiente tabla. Póngase "$\surd$" para mostrar que los números que aparecen pertenecen a los conjuntos señalados. Póngase "X" si el número no es elemento del conjunto.

21.

Conjuntos	3	−9	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{3}$
Enteros positivos					
Enteros					
Números racionales					

Determinar un valor para n tal que cada una de las proposiciones

que se señalan sea verdadera, debiendo ser n un elemento del conjunto que se indica. Si no existe tal valor, escríbase "ninguno"

22.

Proposición	Enteros positivos	Enteros	Números naturales
$n-5=0$			
$n+2=2$			
$n+1=0$			
$2n=3$			
$n \times n=5$			

5-6 EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES

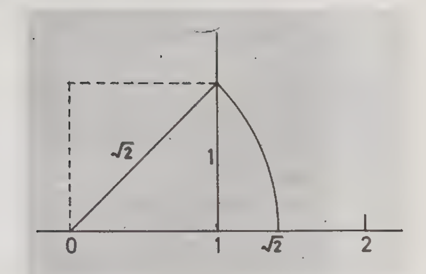
En las matemáticas intervienen las cuatro operaciones fundamentales $(+, -, \times, \div)$. Se han definidos los números racionales de forma tal que dichas operaciones son siempre posibles, excepto la división por cero. Sin embargo, utilizando sólo el conjunto de los números racionales no se puede determinar ningún valor de n que haga válida la siguiente proposición:

$$n^2 = 2$$

Es decir, no se puede determinar un número racional a/b tal que

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = 2.$$

Sobre el eje numérico hemos visto que los números racionales son densos, dado que existe un número racional comprendido entre dos números racionales dados cualesquiera. Sin embargo, la apariencia de una recta continua de puntos con números racionales como coordenadas es engañosa. Por ejemplo, si consideramos que existe un número que representa la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado unidad, el cuadrado de dicho número será 2. A dicho número lo representamos por $\sqrt{2}$ y podemos localizar su punto sobre la recta numérica con coordenada $\sqrt{2}$. Sin embargo, el número $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional.



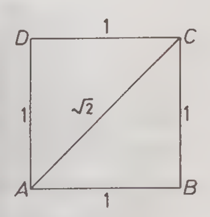
Utilizaremos una **demostración indirecta** para demostrar que $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional. Es decir, partimos de considerar que $\sqrt{2}$ es un número racional y demostraremos que eso nos conduce a una contradicción. Así pues, supongamos que a/b es un número racional tal que a y b no son ambos números pares y

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = 2; \quad \text{es decir,} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Entonces $a^2 = 2b^2$ siendo a un entero cuyo cuadrado es par. Por consiguiente, según el Ejercicio 29 de §5-5, a debe ser par; es decir, $a = 2k$, siendo k entero. Si consideramos $2k$ en lugar de a, se tiene

$$(2k)^2 = 2b^2;$$
$$4k^2 = 2b^2;$$
$$2k^2 = b^2.$$

siendo b un entero cuyo cuadrado es par y por consiguiente b tiene que ser un entero par. Esto es contrario al supuesto de que a y b no eran ambos pares. Así pues, la consideración de que existe un número racional cuyo cuadrado es 2 nos conduce a una contradicción. En otras palabras, si existe un número cuyo cuadrado es 2, dicho número no puede ser racional.



No obstante, existen segmentos de recta de longitud $\sqrt{2}$. Por ejemplo, como se ha observado, la diagonal $\overline{AC}$ de un cuadrado ABCD de lado 1 tiene por longitud $\sqrt{2}$. De ello la necesidad de números que representen longitudes de segmentos de recta y por lo tanto la necesidad de números que no son números racionales. A estos números que no son números racionales se les da el nombre de **números irracionales.** Se necesitan números irracionales tales como $\sqrt{2}$ a fin de tener coordenadas para cada uno de los puntos de una recta. A la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales se le da el nombre de conjunto de los **números reales.**

Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de la recta numérica. Esta característica es la que distingue al conjunto de los números reales del conjunto de los números racionales. Así, todo número real es la coordenada de un punto de la recta numérica y todo punto de la recta numérica es la gráfica de un número real. De acuerdo con esto, nos referiremos a la recta numérica como la recta de los números reales y diremos que dicha recta es *completa.*

No será necesaria ninguna otra ampliación del sistema numérico mientras no se pretenda resolver ecuaciones tales como

$$n \times n = -1.$$

Pero la solución de tal problema, que incluye el empleo de los números imaginarios y la ampliación al conjunto de los números complejos queda fuera de los objetivos de este libro.

Los números reales pueden clasificarse en racionales e irracionales según su representación decimal. Cada número real puede representarse por medio de un decimal; cada decimal representa un número real. Los números reales que son racionales se representan por decimales puros o por decimales periódicos tales como los siguientes:

$$\frac{1}{4} = 0.25; \qquad \frac{3}{8} = 0.375; \qquad \frac{1}{3} = 0.33\overline{3}; \qquad \frac{3}{11} = 0.2727\overline{27}.$$

Obsérvese el empleo de una barra para indicar que una secuencia de dígitos se repite indefinidamente. La barra debe cubrir el dígito o dígitos que se repiten. Se puede, si se desea, considerar cualquier decimal puro como un decimal periódico cuyo período es cero. Por ejemplo,

$$\frac{1}{4} = 0.25\bar{0}; \qquad \frac{3}{8} = 0.375\bar{0}.$$

Los números reales que son irracionales se representan por decimales indefinidos, no periódicos, tales como

$$\sqrt{2} = 1.414214\ldots; \qquad \pi = 3.1415926\ldots.$$

En cada uno de estos ejemplos, por más que se amplíe la representación decimal, los dígitos no presentan ningún período repetitivo. Resulta a veces posible representar números irracionales mediante una sucesión de dígitos que tiene un cierto modelo, pero que no repite ninguna sucesión particular de dígitos. Por ejemplo, cada una de las siguientes sucesiones representa un número irracional:

$$0.20220222022220222220\ldots$$
$$0.30530053000530000 5\ldots$$
$$0.40400400040000400000 4\ldots$$

EJEMPLO 1: ¿Cuántos ceros hay comprendidos entre el punto decimal y el centésimo 5 de la siguiente sucesión?

$$0.05005000500005\ldots$$

Solución: Un cero precede al primer 5, dos ceros al segundo cinco, etc. El total de ceros es la suma

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100.$$

Por el método del Ejercicio 9, §1-1, la suma es 5050.

Resumiendo, todo número real puede representarse por medio de un decimal. Si el número real es un número racional, puede representarse ya sea por un decimal puro o por un decimal periódico. Si el número real es un número irracional, puede representarse por un decimal indefinido no periódico.

Es fácil demostrar que todo número racional en forma fraccio naria puede representarse mediante un decimal periódico o puro. Consideremos, por ejemplo, un número racional cualquiera tal como $^{12}/_{7}$. Al dividir 12 entre 7, los posibles restos son 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Si el resto es 0, la división es exacta; si cualquiera de los restos aparece por segunda vez, los términos que le siguen se repiten también. Dado que sólo hay 7 posibles restos al dividir entre 7, los restos se repetirán o la división resulta exacta en la séptima cifra decimal. Consideremos el cálculo del valor decimal de $^{12}/_{7}$ mediante la división:

```
     1.714285
  7 )12.000000
      7
     ---
     (5)0
      49
      ---
       10
        7
       ---
        30
        28
        ---
         20
         14
         ---
          60
          56
          ---
           40
           35
           ---
           (5)
```

El hecho de que se presente de nuevo el resto 5 implica que se repetirá nuevamente en la división el mismo proceso y que los dígitos 714285 se repetirán una y otra vez; es decir, $^{12}/_{7}$ = ...

$1.714285\overline{714285}$. En forma análoga, cualquier número racional $\frac{p}{q}$ puede expresarse como un decimal puro o periódico, necesitándose a lo sumo q cifras decimales para poderlo identificar.

Se puede también demostrar que cualquier decimal puro o periódico puede escribirse como un número racional de la forma a/b.

Si un decimal es puro, se puede representar mediante una fracción cuyo denominador es una potencia de 10. Por ejemplo, si $n = 0.75\overline{0}$, entonces $100n = 75$, y $n = {}^{75}/_{100}$ que se reduce a $\frac{3}{4}$. Si una fracción puede representarse como un decimal puro, su de-

nominador es un divisor de una potencia de 10. Si un decimal es periódico, puede expresarse como un número racional. Por ejemplo, si un decimal n repite un dígito, puede determinarse $10n - n$. Por ejemplo, supongamos $n = 3.244\overline{4}$ ... Entonces, $10n = 32.444\overline{4}$ y tenemos:

$$\begin{aligned} 10n &= 32.444\overline{4} \\ n &= 3.244\overline{4} \\ \hline 9n &= 29.200\overline{0} \end{aligned}$$

$$n = \frac{29.2}{9} = \frac{292}{90} = \frac{146}{45}$$

También se puede evitar el empleo de decimales en las fracciones comunes:

$$\begin{aligned} 100n &= 324.44\overline{4} \\ 10n &= 32.44\overline{4} \\ \hline 90n &= 292 \end{aligned}$$

$$n = \frac{292}{90} = \frac{146}{45}$$

Si un decimal n repite dos dígitos, se determina $10^2n - n$; si repite tres dígitos, se determina $10^3n - n$; y así sucesivamente.

EJEMPLO 2: Expresar $0.\overline{36}$ como un cociente de enteros.

Solución: Sea $n = 0.\overline{36}$; entonces $100n = 36.\overline{36}$ teniéndose:

$$\begin{aligned} 100n &= 36.\overline{36} \\ n &= 0.\overline{36} \\ \hline 99n &= 36 \end{aligned}$$

$$n = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

EJEMPLO 3: Expresar $0.78346\overline{346}$ como un cociente de enteros.

Solución:

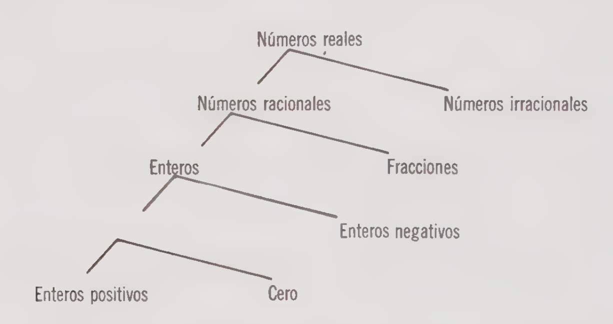
$$\begin{aligned} 1000n &= 783.46346\overline{346} \\ n &= 0.78346\overline{346} \\ \hline 999n &= 782.68 \end{aligned}$$

$$n = \frac{782.68}{999} = \frac{78{,}268}{99{,}900} = \frac{19{,}567}{24{,}975}$$

Los números reales pueden clasificarse de diversas formas. Cualquier número real es:

1. Positivo, negativo o cero;
2. Número racional o número irracional;
3. Decimal puro, decimal periódico o decimal indefinido no periódico.

La relación del conjunto de los números reales con algunos de los otros conjuntos de números que se han estudiado se muestra en el siguiente diagrama:



EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 5-6

Decir si cada uno de los siguientes números es **(a)** *entero;* **(b)** *racional;* **(c)** *irracional;* **(d)** *real:*

1. 5

2. 5.76

3. -3

4. $1.73\overline{73}$

5. $\sqrt{2}$

6. 3.1415926 . . . ; i.e., π

7. $0.0027\overline{27}$

8. $\frac{19}{31}$

9. $\sqrt{8}$

10. $\sqrt{9}$

Decir si cada uno de los siguientes números puede representarse por un decimal puro, periódico o indefinido no periódico:

11. $\frac{3}{4}$

12. $\frac{2}{5}$

13. $\frac{2}{3}$

14. $\frac{5}{12}$

15. $\frac{13}{16}$

16. $\sqrt{3}$

Expresar cada uno de los siguientes números en forma decimal:

17. $\frac{3}{5}$

18. $\frac{1}{6}$

19. $\frac{27}{15}$

20. $\frac{1}{17}$

Expresar cada uno de los siguientes números en forma de un cociente de enteros:

21. $0.\overline{45}$

22. $0.\overline{234}$

23. $0.\overline{522}$

24. $0.\overline{9}$

25. $2.11\overline{1}$

26. $5.22\overline{2}$

27. $2.14\overline{14}$

28. $4.25\overline{25}$

29. $0.123\overline{123}$

30. $65.268\overline{268}$

En los Ejercicios del 31 al 35 clasificar cada una de las proposiciones como verdadera o falsa:

31. Todo número racional es un número real.

32. Todo número real es un número racional.

33. Todo decimal periódico es la representación de un número real.

34. Todo número irracional puede representarse en forma decimal.

35. El conjunto de los números reales contiene el inverso aditivo de cada uno de sus elementos.

36. Escribir los diez primeros dígitos del decimal **(a)** $0.\overline{37}$; **(b)** $0.4\overline{567}$.

37. Escribir el vigésimo dígito a la derecha del punto del decimal **(a)** $0.\overline{372}$; **(b)** $0.6\overline{89}$.

5-7 RELACIONES DE ORDEN

El conjunto de los números {1, 3, 5} es *equivalente* al conjunto de los números {3, 1, 5} dado que dos conjuntos son equivalentes si tienen los mismos elementos. Sin embargo, los elementos del conjunto {1, 3, 5} están enumerados en su orden natural en tanto que los elementos del conjunto {3, 1, 5} no están enumerados en dicho orden. El propósito de esta sección es ampliar el concepto intuitivo que se tiene del orden de los números.

Es costumbre enumerar los números enteros de la forma

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

considerándose dicho ordenamiento como su **orden natural.** Sean a y b dos números enteros. Se dice que a es menor que b si y sólo si existe un número positivo c tal que $a + c = b$. Dicho de otra forma, $a < b$ si y sólo si a precede a b al considerarse los enteros en su orden natural. Así por ejemplo, $2 < 5$ dado que $2 + 3 = 5$; $-2 < 3$ dado que $-2 + 5 = 3$.

Se define $b > a$ si y sólo si $a < b$. Por ejemplo, $5 > 2$ dado que $2 < 5$; $3 > -2$ dado que $-2 < 3$.

Pueden definirse las siguientes relaciones entre los números:

$a = b$ si y sólo si a y b representan el mismo número;

$a \neq b$ (léase "a no es igual a b") si y sólo si a y b representan números diferentes;

$a < b$ (léase "a es menor que b") si y sólo si existe un número positivo c tal que $a + c = b$,

$a \nless b$ (léase "a no es menor que b") si y sólo si no existe un número positivo c tal que $a + c = b$;

$b > a$ (léase "b es mayor que a") si y sólo si $a < b$;

$b \ngtr a$ (léase "b no es mayor que a") si y sólo si $a \nless b$;

$b \leq a$ (léase "b es menor o igual que a") si y sólo si $b \ngtr a$:

$a \geq b$ (léase "a es mayor o igual que b") si y sólo si $b \leq a$.

Las dos últimas relaciones están basadas en un principio muy importante conocido como el **principio de tricotomía.** *Si a y b son dos números reales cualesquiera,* se cumple entonces una y sólo una de las siguientes relaciones,

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b$$

Dicho de otra forma, en el orden natural de los números, a precede a b, a y b representan el mismo número o b precede a a. Así pues, si $a \neq b$, o $a < b$ o $b < a$. Esto se conoce como la **propiedad de comparación** de los números.

A continuación se exponen algunos ejemplos de proposiciones correctas de acuerdo con el orden natural de los números:

$$2 < 5, \quad 3 \leq 7, \quad 4 \leq 4, \quad 7 \geq 6, \quad 7 \geq 7, \quad 6 \neq 7.$$

Las relaciones de orden para los números racionales se definen en términos de las relaciones de orden para los enteros. Primero cada uno de los números racionales se expresa de forma que su denominador sea positivo; entonces $0 < b$, $0 < d$, y

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } ad < bc.$$

Obsérvese que bajo dicha definición

$$\frac{2}{1} < \frac{3}{1}, \quad \frac{-4}{1} < \frac{-3}{1}, \quad \frac{2}{3} < \frac{7}{8}.$$

Se ha visto que el conjunto de los números reales es denso. No obstante, sobre la recta numérica existe un orden, siendo posible localizar tanto números racionales como irracionales comprendidos entre dos números reales cualesquiera dados, tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1: Determinar un número racional comprendido entre 0.342 y 0.343.

Solución: Existen infinidad de posibles soluciones; es decir, hay un número infinito de números racionales comprendidos entre dos números reales cualesquiera dados. Considérense los dos números dados en la forma 0.3420 y 0.3430.

Entonces, los siguientes son ejemplos de números racionales comprendidos entre los dos.

$$0.3421, \quad 0.3427, \quad 0.\overline{3421}.$$

EJEMPLO 2: Determinar un número racional comprendido entre $0.\overline{23}$ y $0.\overline{24}$.

Solución: En este caso es necesario determinar un decimal puro o periódico que sea mayor que $0.\overline{23}$ pero menor que $0.\overline{24}$. Se pueden dar las siguientes respuestas:

$$0.234, \qquad 0.235, \qquad 0.\overline{238}.$$

Es fácil ver que dichos números quedan comprendidos entre los dos números dados; basta para ello escribir varios dígitos decimales.

$$\begin{aligned} 0.\overline{23} &= 0.232323\ldots \\ &\ 0.234000\ldots \\ &\ 0.235000\ldots \\ &\ 0.238238\ldots \\ 0.\overline{24} &= 0.242424\ldots \end{aligned}$$

EJEMPLO 3: Determinar un número irracional comprendido entre 0.47 a 0.48.

Solución: Nuevamente, en este caso hay infinidad de soluciones, dado que existe un número infinito de números irracionales comprendidos entre dos números racionales cualesquiera. Posibles respuestas son

$$0.4724722472224722222\ldots,$$
$$0.475050050005000005\ldots.$$

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 5-7

En los Ejercicios 1-12, considerando el orden natural de los enteros, colóquese el símbolo apropiado (<, = o >):

1. 3 ___ 6

2. −11 ___ 17

3. 7 ___ 11

4. 7 ___ −3

5. 3 + 4 ___ 5

6. 3 + 4 ___ 7

7. 3 − 2 ___ 5 − 3

8. 7 + 5 ___ 5 + 7

9. 5 × 6 ___ 6 × 5

10. 120 ÷ 30 ___ 120 ÷ 40

11. 720 ÷ 180 ___ 720 ÷ 120

12. 17 × 31 ___ 17 × 29

13. Repítanse los Ejercicios 1-12 utilizando los símbolos $=$ y $\neq$.

14. Repítanse los Ejercicios 1-12 utilizando los símbolos $<$ y $\geq$.

15. Repítanse los Ejercicios 1-12 utilizando los símbolos $>$ y $\leq$.

Escribir cada uno de los siguientes conjuntos de números en orden creciente:

16. 0.35, 0.353553555 . . . , 0.35355, $0.\overline{35}$, $0.3\overline{5}$.

17. 1.414, 1.4141, $1.\overline{41}$, 1.414114111 . . . , 1.4.

18. 0.078, $0.07\overline{8}$, 0.0787887888 . . . , 0.07, $0.\overline{07}$.

19. De los siguientes números ¿cuál representa un número racional comprendido entre 0.37 y 0.38?
(**a**) 0.375; (**b**) $0.\overline{37}$; (**c**) 0.373773777 . . . ; (**d**) $0.37\overline{8}$.

20. De los siguientes números ¿cuál representa un número irracional comprendido entre 0.234 y 0.235? (**a**) 0.2345; (**b**) $0.\overline{234}$; (**c**) 0.234040040004 . . . ; (**d**) 0.23454554555 . . . .

21. Mencionar dos números racionales comprendidos entre 0.523 y 0.524.

22. Mencionar dos números irracionales comprendidos entre 0.38 y 0.39.

23. Mencionar dos números irracionales comprendidos entre 0.78 y 0.79.

24. Mencionar dos números racionales comprendidos entre 0.356 y 0.357.

EXAMEN RELATIVO AL CAPITULO 5

1. Hacer ver una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números enteros negativos.

2. Enumerar el conjunto de los números primos que son menores que 15.

3. Escribir la factorización prima de 300.

4. Determinar el máximo común divisor de 120 y 140.

5. Determinar el mínimo común múltiplo de 90 y 1500.

6. Clasificar las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas:

(a) Todo número natural es un número positivo.
(b) El opuesto de todo número positivo es un entero negativo.
(c) Todo número racional puede expresarse como el cociente de dos enteros.
(d) Todo número racional puede expresarse como un decimal puro o periódico.
(e) Entre dos números racionales sólo hay un número racional.

7. Cópiese la siguiente tabla. Utilícese "$\surd$" para mostrar que los números que se señalan son elementos de los conjuntos que se indican. Si el número no es elemento del conjunto, póngase "X".

	(a)	*(b)*	*(c)*	*(b)*	*(e)*
Conjunto	$\frac{3}{4}$	-2	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4}$
Enteros positivos					
Enteros					
Números racionales					
Números reales					

8. Escribir en forma de cociente de enteros: (a) $0.\overline{27}$; (b) $0.\overline{612}$.

9. Menciónense: (a) un número racional y (b) un número irracional comprendido entre 0.25 y 0.26.

10. Escribir los siguientes números en orden creciente: $0.2\overline{3}$, 0.232332333 . . . , 0.23, 0.2323, $0.\overline{23}$.

Capítulo 6

UNA INTRODUCCION A LA GEOMETRIA

La Geometría, que en un principio se ocupaba de mediciones terrestres (geo-metria) mediante el empleo de segmentos de rectas y otras figuras que representasen magnitudes físicas, evolucionó hasta convertirse en la ciencia que estudia las propiedades de conjuntos de elementos geométricos. Las figuras sirven como elementos de la geometría. Las relaciones entre dichos elementos, así como las demostraciones de sus propiedades, a partir de un conjunto dado de postulados son temas propios de cursos más avanzados.

A las figuras geométricas se las considera por lo general como conjuntos de puntos. Si bien en la geometría abstracta se consideran otros elementos básicos, aquí nos limitaremos a la consideración de puntos. No se trata de una restricción grave dado que el concepto de punto se puede *interpretar* de muchas formas. Por

ejemplo, es frecuente pensar en un punto como una posición sobre una recta, sobre un plano o en el espacio. Podemos también pensar en un punto sobre una escala en términos de su coordenada. Podemos incluso pensar en ciudades como puntos sobre un mapa, considerando como rectas las rutas aéreas que las unen. Esta libertad de interpretar en diversas formas la idea de punto da lugar a fundamentar geometrías más abstractas.

6-1 PUNTOS, LINEAS Y PLANOS

Tenemos una idea intuitiva del significado de punto, pero no se ha dado ni se dará una *definición* de punto. Para definir un término es necesario distinguirlo de otros términos. Para ello hace falta describirlo por medio de palabras cuyo significado nos sea conocido (es decir, en términos más sencillos) de tal forma que cuando se aplique la descripción, ésta resulte apropiada al término que define.

Los griegos describían al punto como "lo que no tiene dimensión". Hoy en día aceptamos tal descripción a título de interpretación, pero no podemos considerarla como definición. No la aceptamos como definición formal ya que no está dada en los términos más sencillos. De hecho es imposible encontrar términos más sencillos que sirvan para definir el punto.

Las rectas son términos que tampoco se definen. En todo sistema lógico existen forzosamente algunos términos indefinidos. En otras palabras, no es posible definirlo todo; es forzoso empezar con algo. En geometría se parte de puntos y rectas. Después, en términos de dichos conceptos se definen otras figuras.

No obstante ser términos indefinidos, las rectas poseen ciertas propiedades de las cuales exponemos cuatro a continuación:

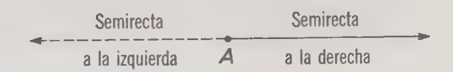
1. *Una recta es un conjunto de puntos.* Se dice que cada punto está *sobre* la recta.

2. *Dos puntos diferentes cualesquiera determinan una recta y sólo una.* En otras palabras, dados dos puntos cualesquiera A y B, existe una recta y sólo una AB que pase por ellos. Así pues, una recta puede designarse por dos cualesquiera de sus puntos. Si C y D son puntos de la recta AB, entonces la recta CD es la misma que la recta AB.

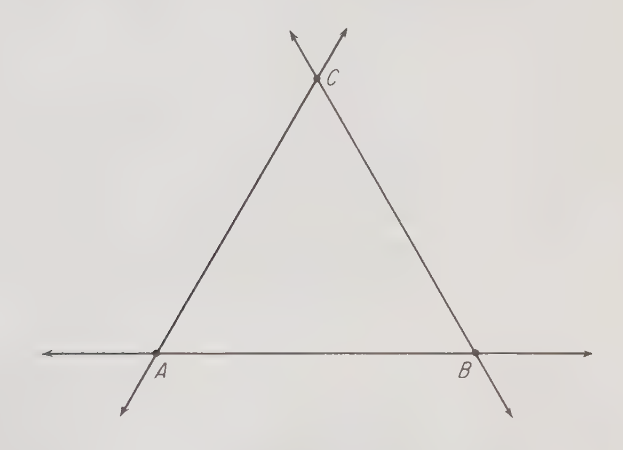


3. *Toda recta es una recta numérica real.* Así, como se ha visto en §5-6, toda recta es un conjunto denso de puntos teniendo infinidad de puntos.

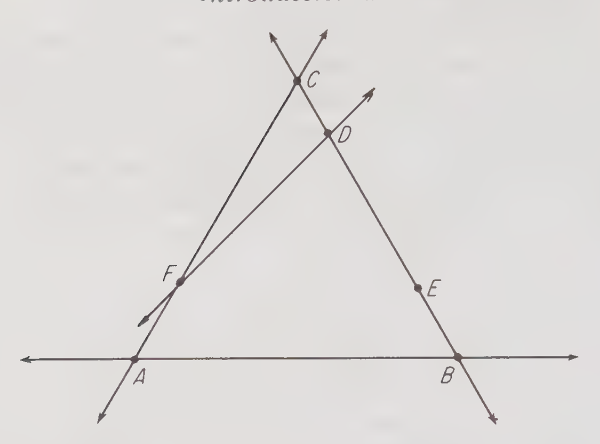
4. *Un punto cualquiera A de una recta la divide en tres partes: el punto A y dos semi rectas, una a cada lado de A.* Cada semi recta es un conjunto de puntos. El punto *A* no es punto (elemento) de ninguna de las semi rectas.



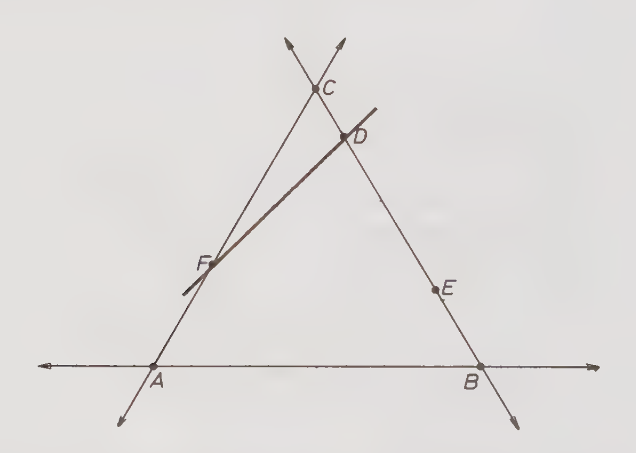
Tres puntos *A, B, C* son, o no son, colineales. Obsérvese que pensamos en puntos colineales en el sentido de puntos sobre una recta. Si los puntos no son colineales, entonces, dado que dos puntos cualesquiera determinan una recta única, los tres puntos determinarán tres rectas *AB*, *BC* y *AC* como se ven en la figura.



Cada una de las rectas *AB, BC* y *AC* es un conjunto de puntos. Dos puntos cualesquiera de una recta, la determinan. Así por ejemplo, los puntos *D* y *E* de la recta *BC* determinan la recta *BC,* y decimos que *BC* y *DE* son dos formas de nombrar la misma recta. Dos puntos cualesquiera de la figura compuesta por las rectas *AB, BC* y *AC,* determinan una recta. Si los dos puntos no pertenecen a una de las tres rectas dadas, entonces dichos puntos determinan una nueva recta. Por ejemplo, los puntos *D* y *F* determinan una nueva recta en la figura.



De dicha forma se pueden determinar una infinidad de rectas. En la siguiente figura se muestran varias de esas rectas. El conjunto de todos los puntos sobre tales rectas es el conjunto de los puntos del plano determinado por los tres puntos A, B y C.



Es frecuente aceptar el concepto de plano sin definirlo. Sin embargo, los planos tienen ciertas propiedades básicas de las cuales exponemos cinco a continuación:

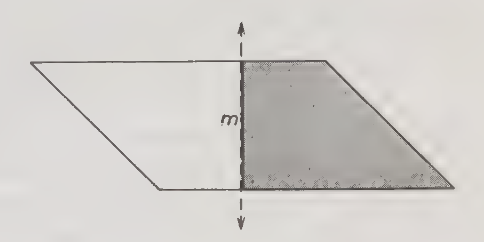
1. *Un plano es un conjunto de puntos*. Cada uno de los puntos del plano se dice que está *sobre (en)* el plano.

2. *Tres puntos cualesquiera no colineales determinan un plano y sólo uno*. En otras palabras, existe un plano y sólo uno que pasa por tres puntos cualesquiera dados no colineales. Por ejemplo, la mejor forma de restirar una cartulina es haciéndolo en sólo tres

de sus puntos; un tripié es más estable que muchas sillas de cuatro patas. Esta propiedad la aplicamos al mencionar planos tales como *ABC* por medio de tres puntos cualesquiera que están en el plano pero sin estar alineados.

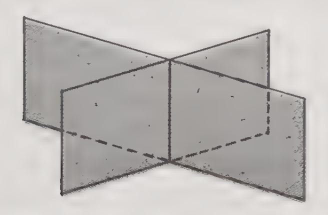
3. *Si dos puntos de una recta están sobre un plano, entonces el plano contiene a toda la recta.*

4. *Una recta m cualquiera sobre un plano, divide al plano en tres partes: la recta m y dos semi planos.* Los puntos de la recta *m* no pertenecen a ninguno de los semiplanos. Sin embargo, pese a no ser parte de ninguno de ellos, es frecuente llamar a la recta *m* la **arista** de ambos semiplanos.



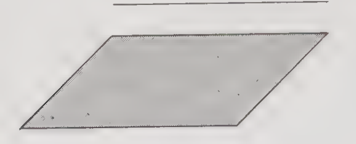
Obsérvese que podemos pensar en los puntos del plano que están a la derecha de *m* formando un semiplano y en los puntos del plano que están a la izquierda de *m* formando el otro semiplano.

5. *Dos planos o bien tienen una recta en común o no tienen ningún punto en común.* En otras palabras, dos planos cualesquiera diferentes o se cortan según una recta o son paralelos.

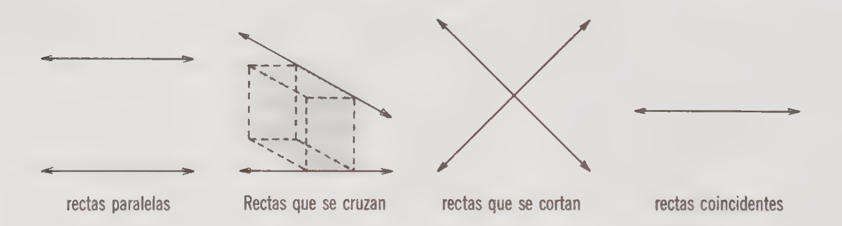




En la geometría clásica —también conocida como geometría euclideana— es factible que dos planos no tengan ningún punto en común. Dos planos que no tengan ningún punto en común se dice que son **paralelos**. Una recta es paralela a un plano si no tiene ningún punto en común con el plano.



Pensemos en un salón de clase. En cualquiera de las paredes, la línea a lo largo del techo y la línea a lo largo del piso no parecen cortarse, es decir, por más que se las prolongue no tienen ningún punto en común. La línea a lo largo del techo y una de las paredes tampoco corta a la línea de intersección de otras dos paredes. Para distinguir estos dos casos tenemos que considerar el hecho de que en el primero, las dos líneas están en la misma pared (plano), en tanto que en el segundo caso no puede haber un plano que contenga a ambas líneas. En general, dos rectas que están en un mismo plano y no tienen ningún punto en común se dice también que son **paralelas;** dos rectas que no están en un mismo plano se dice que se **cruzan;** dos rectas diferentes que tienen un punto en común se dice que se **cortan;** dos rectas que tienen todos sus puntos en común se dice que son **coincidentes,** pudiéndose considerar que se trata de una misma recta con dos nombres diferentes.



Obsérvese que las flechas indican que las rectas pueden prolongarse indefinidamente, es decir, las figuras son tan sólo representaciones de rectas y no propiamente rectas. Dichas representaciones están sobre la página impresa, es decir, sobre un plano. Así pues, la figura para rectas que se cruzan debe ser considerada como una "representación" sobre un plano de rectas que se cruzan en el espacio.

Los puntos, rectas y planos constituyen los elementos básicos de la geometría. Para definir otras figuras geométricas, es decir, para hacer mención de otros conjuntos de puntos, hacemos uso de estos elementos y de relaciones entre ellos, tales como intersección, paralelismo, coincidencia, cruce y separación.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 6-1

1. Considérense tres puntos A, B y C no colineales. Trácense y nómbrense cada una de las rectas que determinan los tres puntos.

2. Repítase el Ejercicio 1 para cuatro puntos A, B, C y D tales que tres cualesquiera de ellos no estén alineados.

3. Considérese que los cuatro puntos del Ejercicio 2 no están en el mismo plano. Nómbrese cada uno de los planos que determinan dichos puntos.

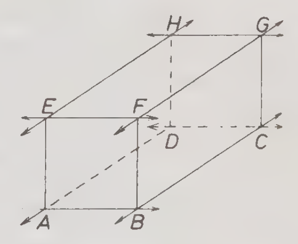
4. Considérese que todos los puntos dados están en el mismo plano y que tres cualesquiera de ellos no están alineados. Dígase cuántas rectas son las determinadas por el número de puntos que se indica: **(a)** 2; **(b)** 3; **(c)** 4; **(d)** 5; **(e)** 6; ***(f)** 10; ***(g)** n.

5. Considérese que todas las rectas dadas están en el mismo plano, que cada recta corta a cada una de las otras rectas y que ninguna terna de rectas tiene un punto común. Establecer cuántos son los puntos determinados por el número de rectas que se indica: **(a)** 2; **(b)** 3; **(c)** 4; **(d)** 5; **(e)** 6; ***(f)** 10; ***(g)** n.

6. Considérense las rectas a lo largo de las aristas del cuerpo representado en la siguiente figura. Dígase si las rectas que se indican son paralelas, se cruzan o se cortan:

(a) $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ **(b)** $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{EF}$

(c) $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{EH}$ **(d)** $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{FG}$



Determínese si las siguientes proposiciones de geometría euclideana son verdaderas o falsas, para representar rectas y planos, valiéndose para ello de objetos tales como lapiceros, superficies de mesa, etcétera.

7. Dada una recta m y un punto P fuera de ella, existe una y sólo una recta t que pasa por P y es paralela a m.

8. Dada una recta m y un punto P fuera de ella, existe una sola recta q tal que contenga a P y corte a m.

9. Dada una recta m y un punto P fuera de ella, existe una sola recta s tal que contenga a P y cruce a m.

10. Dada una recta m y un punto P fuera de ella, existe un solo plano paralelo a m y que contenga a P.

11. Dado un plano ABC y un punto P fuera de él, existe un solo plano que contiene a P y corta a ABC.

12. Dado un plano ABC y un punto P fuera de él, existe un solo plano que contiene a P y es paralelo a ABC.

13. Dado un plano ABC y un punto P fuera de él, existe una sola recta que contiene a P y corta a ABC.

14. Dado un plano ABC y un punto P fuera de él, existe una sola recta que contiene a P y es paralela a ABC.

15. Dado un plano ABC y una recta m paralela a ABC, existe un solo plano que contiene a m y corta a ABC.

16. Dado un plano ABC y una recta m paralela a ABC, existe un solo plano que contiene a m y es paralelo a ABC.

17. Dado un plano ABC y una recta m paralela a ABC, existe para un punto P cualquiera no contenido en m ni en ABC una sola recta que es paralela a m y a ABC.

Mediante dobleces en una hoja de papel se pueden obtener muchas figuras interesantes. Se recomienda un papel delgado para los siguientes ejercicios:

18. Trácese una recta m y considérese un punto P fuera de ella. Háganse dobleces de tal forma que el punto P coincida con puntos de la recta m lo más espaciados posibles. Repítase la operación al menos unas 20 veces. Descríbase el modelo formado por los dobleces.

19. Trácese una circunferencia C y considérese un punto P exterior. Háganse dobleces de tal forma que el punto P coincida con puntos de la circunferencia lo más espaciados posible. Repítase la operación al menos unas 20 veces. Descríbase el modelo formado por los dobleces.

20. Repítase el Ejercicio 19 para un punto P que sea interior pero que no sea el centro de la circunferencia.

21. Repítase el Ejercicio 19 con el punto P en el centro de la circunferencia.

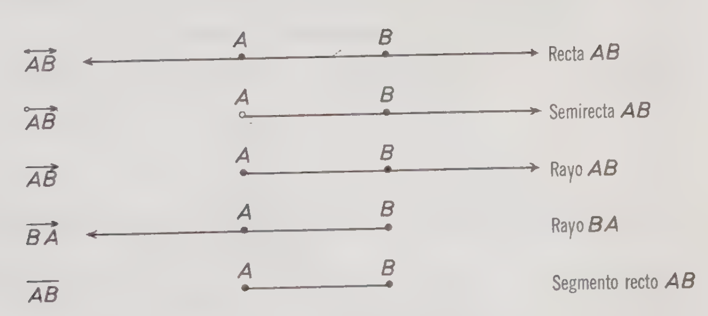
22. Repítase el Ejercicio 19 con el punto P sobre la circunferencia.

6-2 RAYOS, SEGMENTOS DE RECTA Y ANGULOS

Supongamos dados una recta m y dos puntos de ella A y B. Los puntos A y B determinan la recta única m. La llamaremos la recta AB y la designaremos con el símbolo $\overleftrightarrow{BA}$. Como se ha expuesto en §6-1, el punto A divide a la recta m en dos semi rectas. Obsérvese que una sola de las dos semi rectas contiene al punto B.



El conjunto de puntos que formado por la semirecta $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{AB}$ y el punto A, recibe el nombre de **rayo.** El punto A es el **punto extremo** del rayo. Existe uno y sólo un rayo con punto extremo en A y que contenga al punto B. Lo llamaremos el rayo AB y lo designaremos con el símbolo $\overrightarrow{AB}$. Existe también un rayo BA con punto extremo en B y que contiene a A.



El **segmento de recta** $\overline{AB}$, consta de los puntos que son comunes a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ Podemos hacer uso del símbolo $\cap$ para la inter-

sección de los dos conjuntos de elementos (en este caso, puntos) y escribir

$$\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}.$$

Una recta AB no tiene puntos extremos y puede designarse por dos cualesquiera de sus puntos. Un rayo AB tiene un punto extremo y puede designarse por medio de dicho punto A y otro punto cualquiera del rayo. Un segmento de recta AB tiene dos puntos extremos A y B y se le designa por medio de dichos puntos. Sin embargo, en un segmento de recta, es indiferente el orden en que se enuncien los dos puntos, $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Cuando se asigna una dirección a los puntos de un segmento de recta, tal como de A a B, se tiene un **vector** AB. El vector AB tiene dirección y magnitud. La dirección es de A a B; la magnitud es la misma que la del segmento de recta AB. Obsérvese que un rayo $\overrightarrow{AB}$ tiene un solo punto extremo A; un vector AB tiene dos puntos extremos, un **punto inicial** A y un **punto final** B.

$\overrightarrow{AB}$ A —— B Vector AB

Cualquier punto de un segmento de recta AB que no sea punto extremo (es decir, cualquier punto diferente de A y B) recibe el nombre de **punto interior** de AB. Si E es un punto interior de $\overline{AB}$. entonces E está **entre** A y B. Así pues, el segmento de recta AB consta de los puntos extremos A y B y de los puntos de la recta AB que están entre A y B. Los puntos interiores de un segmento AB forman el **segmento abierto** AB:

$\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$ A —— B Segmento abierto AB

EJEMPLO 1: Dada la siguiente figura, identificar cada uno de los conjuntos de puntos:

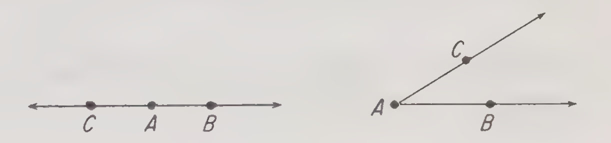
(a) $\overline{PQ} \cup \overline{QS}$ (b) $\overline{PR} \cap \overline{QS}$

(c) $\overrightarrow{QR} \cup \overrightarrow{SR}$ (d) $\overrightarrow{PQ} \cap \overrightarrow{QS}$

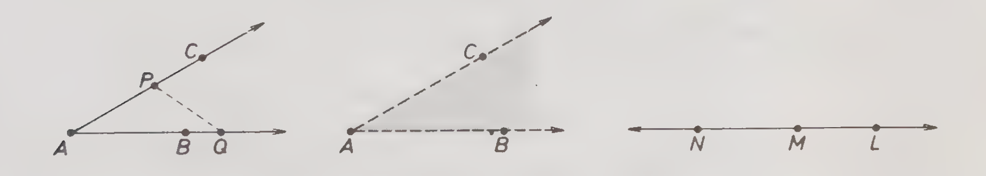


Solución: (a) $\overline{PS}$; (b) $\overline{QR}$; (c) $\overleftrightarrow{PQ}$ (puede utilizarse una cualquiera de las diversas formas de nombrar la recta); (d) $\overrightarrow{QS}$ (este rayo también puede designarse por $\overrightarrow{QR}$).

Toda recta AB es un conjunto de puntos. Si C es un punto de la recta tal que A está entre C y B, entonces la recta es la unión de los rayos AB y AC. Los dos rayos tienen un punto extremo A, en común y ambos están sobre la recta AB. Cualquier figura formada por dos rayos que tengan un punto extremo en común es un **ángulo plano.** Los dos rayos pueden estar sobre la misma recta, pero no tienen que estarlo necesariamente. Los ángulos de la siguiente figura pueden designarse por la notación $\angle BAC$; $\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$.

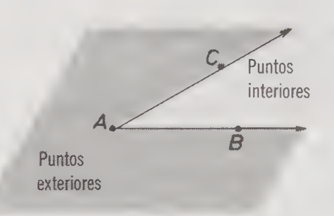


Los rayos AB y AC reciben el nombre de **lados** del $\angle BAC$. Para el ángulo de la siguiente figura existen puntos P y Q del ángulo tales que el segmento abierto $\overset{\circ\!-\!\circ}{PQ}$ no corta al ángulo. Todos los puntos de tales segmentos abiertos son **puntos interiores** del ángulo.



Obsérvese que un ángulo tal como $\angle LMN$ no tiene ningún punto interior, dado que $\overline{PQ} \subset \angle LMN$ para todos los puntos P

y Q del ángulo. Los lectores que hayan previamente estudiado geometría pueden observar que todo ángulo que tenga interior, tiene una medida comprendida entre 0° y 180°. Esta es la razón por la que algunos libros elementales sólo consideran ángulos aquellos cuya medida sea mayor 0° y menor de 180°



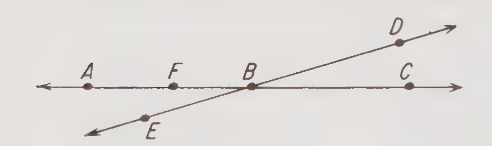
Si un ángulo tiene interior, entonces separa al plano en tres conjuntos diferentes: los puntos del ángulo, los puntos interiores del ángulo y los **puntos exteriores** del ángulo.

EJEMPLO 2: Dada la figura, identificar cada uno de los siguientes conjuntos de puntos:

(a) $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$ (b) $\overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BD}$

(c) $\angle CBD \cap \overrightarrow{ED}$ (d) $\overline{AF} \cap \overrightarrow{BD}$

(e) (Exterior $\angle ABE$) $\cap \overleftrightarrow{BD}$ (f) (Interior $\angle CBE$) $\cap \overleftrightarrow{AC}$



Solución: (a) B, las dos rectas se cortan en el punto B; (b) $\angle CBD$; (c) $\overrightarrow{BD}$; (d) $\varnothing$; (e) $\overset{\circ\rightarrow}{BD}$; (f) $\varnothing$.

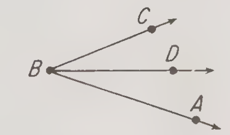
EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 6-2

Dada la figura, identificar cada uno de los siguientes conjuntos de puntos:



1. $\overline{AB} \cup \overline{BD}$
2. $\overline{AB} \cap \overline{CD}$
3. $\overline{AC} \cap \overline{BD}$
4. $\overline{AB} \cap \overline{BC}$
5. $\overline{AD} \cap \overline{BC}$
6. $\overline{AD} \cup \overline{BC}$
7. $\overleftrightarrow{AB} \cap \overline{BC}$
8. $\overleftrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BC}$
9. $\overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{CD}$
10. $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{CD}$
11. $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{BA}$
12. $\overrightarrow{DC} \cup \overrightarrow{CA}$

Dada la figura, identificar cada uno de los siguientes conjuntos de puntos:



13. (Exterior $\angle ABC$) $\cap \overrightarrow{BD}$
14. (Interior $\angle ABC$) $\cap \overrightarrow{BD}$
15. (Interior $\angle ABC$) $\cap$ (exterior $\angle DBC$)
16. (Interior $\angle ABC$) $\cup$ (exterior $\angle ABC$) $\cup \angle ABC$
17. (Exterior $\angle DBC$) $\cap \overrightarrow{BA}$
18. (Exterior $\angle DBC$) $\cap \overline{AB}$

Dada la figura, identificar cada uno de los siguientes conjuntos de puntos:

19. (Exterior $\angle BPC$) $\cap \overrightarrow{CP}$

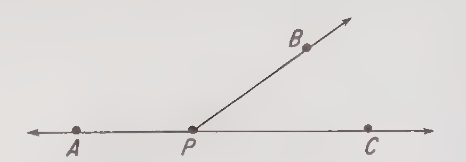
20. (Exterior $\angle BPA$) $\cap \overleftrightarrow{AP}$

21. $\overrightarrow{PB} \cup \overrightarrow{PC}$

22. $\angle BPC \cap \angle BPA$

23. $\angle BPC \cup \angle BPA$

24. (Exterior $\angle BPC$) $\cap \overline{AC}$

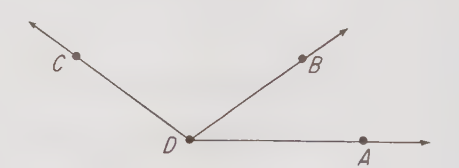


EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 6-2

Dada la figura, identificar cada uno de los siguientes conjuntos de puntos:

1. $\overrightarrow{BC} \cap \overline{AD}$
2. $\overline{BC} \cap AD$
3. $\overline{BC} \cap \overline{AD}$
4. $\overrightarrow{CA} \cup \overline{CD}$
5. $\overline{CA} \cup \overline{CD}$
6. $\overline{CA} \cap \overline{CD}$
7. $\overleftrightarrow{AB} \cap \overline{BD}$
8. $\overleftrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BD}$
9. $\overleftrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BD}$
10. $\overrightarrow{BD} \cup \overrightarrow{DB}$
11. $\overrightarrow{BD} \cap \overline{DB}$
12. $\overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{DB}$

Dada la figura, identificar cada uno de los siguientes conjuntos de puntos:



13. $\angle ADB \cap \angle BDC$

14. (Exterior $\angle ADB$) $\cap$ (exterior $\angle BDC$)

15. (Interior $\angle ADB$) $\cap$ (interior $\angle BDC$)

16. $\angle ADB \cap \overrightarrow{DB}$

17. $\angle ADB \cap \overrightarrow{BD}$

18. $\angle ADB \cap$ (exterior $\angle BDC$)

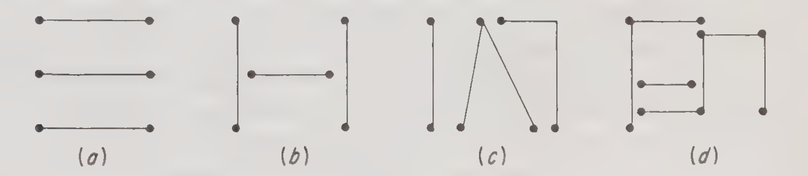
19. $\overrightarrow{DB} \cup$ (interior $\angle ADB$) $\cup$ (interior $\angle BDC$)

20. (Exterior $\angle ADC$) $\cap \overrightarrow{DB}$

21. (Exterior $\angle ADB$) $\cup$ (exterior $\angle ADC$)

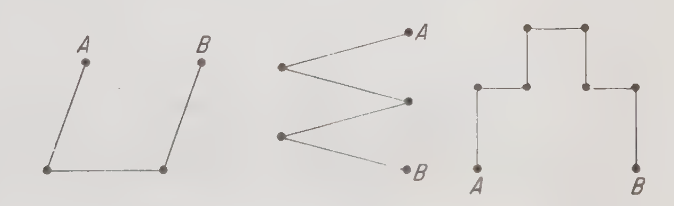
6-3 FIGURAS PLANAS

Continuamos ahora el estudio de figuras geométricas en el plano, es decir, conjuntos de puntos sobre un plano. Consideremos las cuatro figuras del siguiente diagrama, cada una de las cuales es la unión de segmentos de recta. Obsérvese que en cada una de ellas

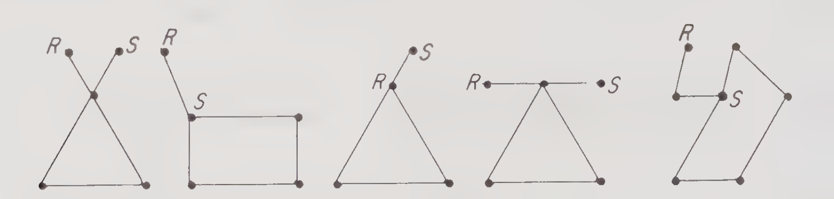


parece que hay tres partes separadas. Una parte puede consistir en un segmento de recta o ser la unión de dos o más segmentos de recta. Sin embargo, es posible separar cada una de las tres partes de cada figura. Se ve que cada una de las partes no está "conectada" con las otras dos, de tal suerte que no se podría trazar la figura sin levantar el lápiz del papel para pasar de una parte a otra. Consideramos que se comprende el significado de la palabra "conectada" pese a no haber sido definida.

Cada una de las tres figuras del siguiente diagrama es la unión de segmentos de recta conectados entre sí. Cada una de ellas puede dibujarse empezando en uno de los puntos A o B y terminando en el otro.

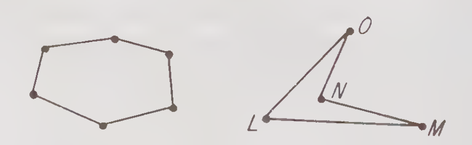


Cada una de las cinco siguientes figuras es la unión de segmentos de recta conectados. Cada una de ellas puede trazarse en forma continua empezando en uno de los puntos *R* o *S* y terminando en el otro. Dichas figuras difieren de las figuras *A, B* del diagrama anterior. Trate de determinar la diferencia.



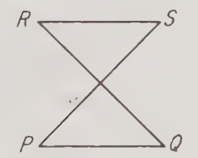
Cualquier unión de segmentos de recta conectados entre sí es una línea quebrada. Compárense las tres líneas quebradas *AB* con las cinco líneas quebradas *RS*. Cada una de las líneas quebradas *AB* puede trazarse empezando en *A* y terminando en *B* sin volver a pasar por ninguno de los segmentos de recta ni pasar por segunda vez por ninguno de sus puntos. Las líneas quebradas *RS* pueden trazarse empezando en *R* y terminando en *S* sin volver a pasar tampoco por ninguno de los segmentos, pero en cada una de ellas se pasa dos veces por un mismo punto. En este caso, se dice que cada una de las líneas quebradas *RS* se corta a sí misma. Se utiliza la palabra "simple" para distinguir entre estos dos tipos de figuras. Las líneas quebradas *AB* que no se cortan a sí mismas son **figuras simples.** Son también figuras simples los triángulos, cuadrados, circunferencias, rectángulo, etc. Por el contrario, las líneas quebradas *RS no son simples.*

Las dos siguientes figuras difieren de las líneas quebradas *AB* y *RS*. Cada una de estas figuras es simple, conexa, y unión de segmentos de recta. Sin embargo, difieren de las figuras anteriores en que, cuando se trazan, se empieza en uno de sus puntos y al final se vuelve a él. Se dice que tales figuras son **cerradas.**

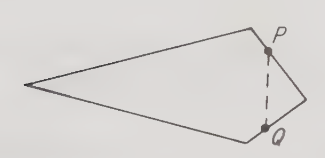


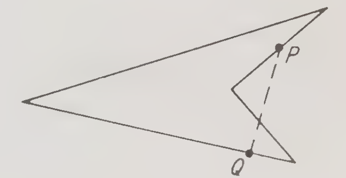
Las figuras pueden ser o no ser simples, pueden ser cerradas o no serlo. Por ejemplo, la figura *LMNO* es simple y cerrada; la figura *PQRS* es cerrada y no simple; las líneas quebradas *AB* son sim-

ples y no cerradas; las líneas quebradas *RS* no son ni simples ni cerradas.

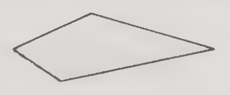


Una línea quebrada simple y cerrada sobre el plano recibe el nombre de **polígono.** Los segmentos de recta que la componen son los **lados** del polígono y los puntos extremos de los segmentos son los **vértices.** Un polígono es **convexo** si todo segmento PQ con puntos extremos en el polígono es o un subconjunto de un lado del polígono o sólo tiene los puntos P y Q en común con el polígono. Un polígono que no es convexo es **cóncavo.**





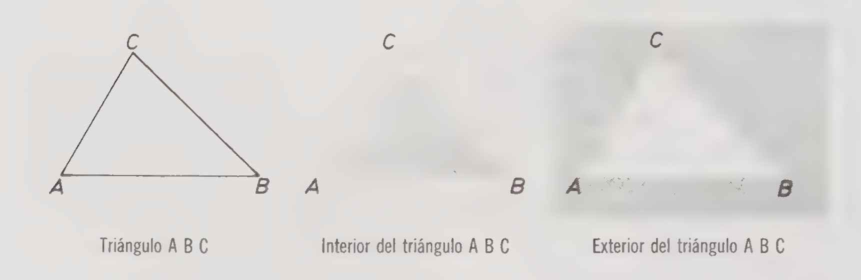
Si P y Q son puntos de un polígono convexo y $\overline{PQ}$ no es subconjunto de un lado del polígono, entonces los puntos del segmento abierto PQ son **puntos interiores** del polígono convexo. La unión de los puntos de un polígono convexo y sus puntos interiores es una **región poligonal.** Los puntos del plano de un polígono convexo que no son puntos de la región poligonal son los **puntos exteriores** del polígono.



Puntos interiores   Región poligonal   Puntos exteriores

Un **triángulo** es un polígono de tres lados. Por ejemplo, el trián-

gulo ABC es el conjunto de los puntos de $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$. El **interior** del triángulo ABC es el conjunto de los puntos de la intersección de los interiores de los tres ángulos, $\angle ABC$, $\angle BCA$ y $\angle CAB$. El **exterior** del triángulo ABC es el conjunto de puntos del plano ABC que no son puntos ni del triángulo ni de su interior.

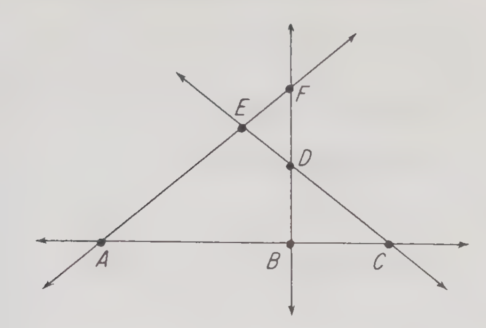


Triángulo A B C   Interior del triángulo A B C   Exterior del triángulo A B C

En general, los polígonos se clasifican según su número de lados y de acuerdo a ello reciben los siguientes nombres:

Número de lados	*Nombre del polígono*
3	triángulo
4	cuadrilátero
5	pentágono
6	exágono
7	eptágono
8	octógono
9	nonágono
10	decágono
12	dodecágono

EJEMPLO: Dada la figura, identificar cada uno de los siguientes conjuntos de puntos: (a) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{ED}$; (b) $\angle BAE \cap \angle BCD$; (c) (interior $\triangle ACE$) $\cap$ (exterior $\angle EFD$); (d) tres ángulos tales que la intersección de sus puntos interiores sea el interior del $\triangle ABF$.



Solución: (a) $\{C\}$; (b) $\overline{AC}$; (c) interior $\triangle BCD$; (d) $\angle ABF$, $\angle BFA$, and $\angle FAB$.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 6-3

Trazar una unión de segmentos de recta que sea:

1. Conexa.

2. No conexa.

Hacer una gráfica de una línea quebrada que sea:

3. Simple pero no cerrada.

4. Cerrada pero no simple.

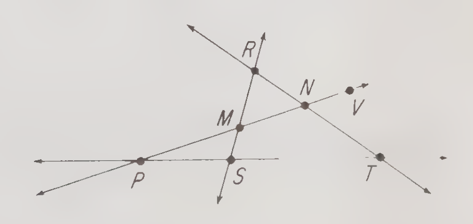
5. Simple y cerrada.

6. Ni simple ni cerrada.

7. Un polígono convexo de cinco lados.

8. Un polígono cóncavo de seis lados.

Dada la figura, identificar cada uno de los siguientes conjuntos de puntos:



9. $\overrightarrow{MN} \cap \overrightarrow{TS}$

10. $\overrightarrow{SR} \cap \overrightarrow{ST}$

11. $\triangle RST \cap \overline{PM}$

12. (Exterior $\triangle RST$) $\cap \overline{MN}$

13. $\overrightarrow{TS} \cap \overline{PM}$

14. $\overline{PV} \cap \triangle RST$

15. (Interior $\triangle RST$) $\cap \overline{MN}$

16. $\overline{RS} \cap \overline{ST}$

17. $\overline{RM} \cup \overline{MN} \cup \overline{RN}$

18. (Exterior $\triangle RST$) $\cap \overrightarrow{NM}$

19. (Exterior $\triangle RST$) $\cap \overleftrightarrow{MN}$

20. $\overrightarrow{PM} \cup \overrightarrow{PS}$

21. $\overline{PV} \cap \triangle MRN$

22. $\angle SRT \cap \angle RTS$

23. (Interior $\triangle RST$) $\cap$ (interior $\triangle MRN$)

24. (Interior $\triangle RST$) $\cup$ (interior $\triangle MRN$)

25. (Interior $\angle VPT$) $\cap$ (interior $\triangle RST$)

26. (Interior $\angle SRT$) $\cap$ (interior $\angle RTS$)

27. (Interior $\angle RST$) $\cap$ (interior $\angle STR$) $\cap$ (interior $\angle TRS$)

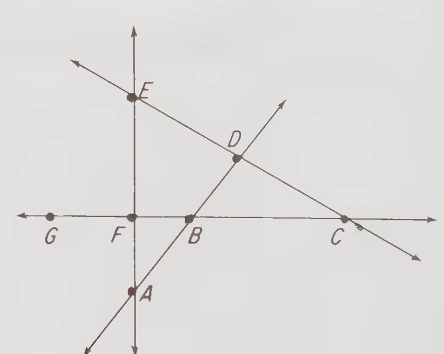
28. (Interior $\triangle RMN$) $\cup$ (exterior $\triangle RMN$) $\cup$ $\triangle RMN$

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 6-3

Trazar una unión de segmentos de recta que sea:

1. No un polígono.
2. Un polígono convexo de siete lados.
3. Un polígono cóncavo de siete lados.
4. No simple, no cerrada y no conexa.

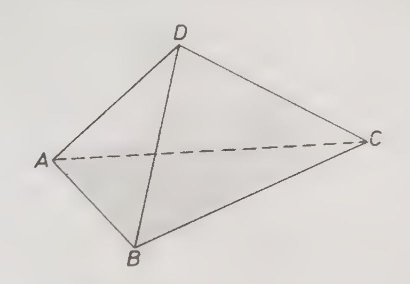
Dada la figura, identificar cada uno de los siguientes conjuntos de puntos:



5. $\overrightarrow{GF} \cap \overrightarrow{DE}$
6. $\overrightarrow{CG} \cup \overrightarrow{CE}$
7. $\triangle CFE \cap \overrightarrow{AB}$
8. $\triangle ABF \cap \triangle BCD$
9. $\triangle ABF \cap \overrightarrow{CG}$
10. $\triangle CBD \cap \triangle CFE$
11. (Interior $\triangle CBD$) $\cap$ (interior $\triangle CFE$)
12. (Interior $\triangle ABF$) $\cap$ (exterior $\triangle CBD$)
13. (Exterior $\triangle ABF$) $\cap$ $\overrightarrow{BF}$
14. (Exterior $\triangle ABF$) $\cap$ $\overleftrightarrow{CD}$
15. (Interior $\triangle CFE$) $\cap$ $\overleftrightarrow{BD}$

6-4 FIGURAS EN EL ESPACIO

Dos puntos cualesquiera diferentes A y B determinan un segmento único AB. Tres puntos cualesquiera A, B y C no colineales determinan un triángulo único ABC. Cuatro puntos cualesquiera A, B,



C y D no coplanares determinan un **tetraedro** único. Los cuatro puntos A, B, C y D son los vértices del **tetraedro;** los seis segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$ son las aristas del **tetraedro.**

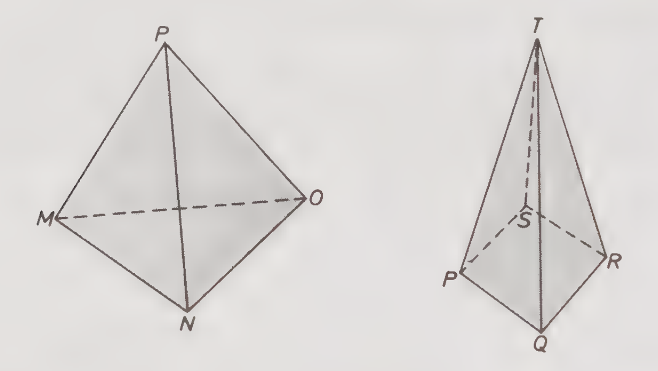
Las regiones triangulares de los cuatro triángulos ABC, BCD, CDA y ABD son las **caras** del tetraedro. Los **puntos interiores** de tetraedro son los puntos de los segmentos abiertos PQ, siendo P y Q puntos del tetraedro (puntos de la unión de las caras del tetraedro) para los que $\overset{\circ\!-\!\circ}{PQ}$ no corta al tetraedro.

Un polígono es la unión cerrada de segmentos; es decir, la unión de segmentos (lados del polígono) tales que dos lados tienen en común el punto extremo de un segmento (vértice del polígono) y

tal que ningún lado contiene un punto interior de otro lado. Un **poliedro** es la unión cerrada de regiones poligonales (**caras** del poliedro) tales que dos caras tienen en común un lado de una región poligonal (**aristas** del poliedro) y tal que ninguna cara contiene un punto interior de otra cara. Los vértices de las regiones poligonales se dice que son también los **vértices** del poliedro. En los siguientes ejercicios se consideran poliedros tales como cubos, pirámides y prismas.

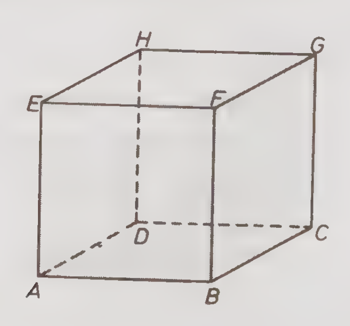
EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 6-4

1. El tetraedro *MNOP* es una **pirámide triangular.** Señálense sus: (a) vértices; (b) aristas; (c) caras.



2. Repítase el Ejercicio 1 para la **pirámide cuadrangular** *PQRST*.

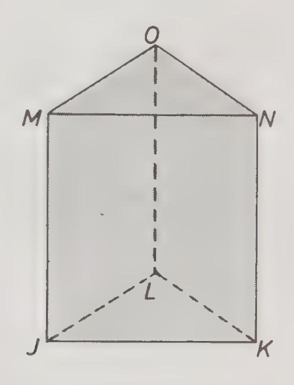
3. Repítase el Ejercicio 1 para el **cubo** *ABCDEFGH*.



4. Considérense las rectas a lo largo de las aristas del cubo del

Ejercicio 3 e identifíquense las rectas que: **(a)** son paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$; **(b)** se cruzan con $\overleftrightarrow{AB}$; **(c)** son paralelas al plano *ABFE*.

5. El cubo tiene todos sus vértices sobre dos planos paralelos determinando caras cuadradas en dichos planos. Según esto, el cubo es un ejemplo de un **prisma cuadrado**. Repítase el Ejercicio 1 para el **prisma triangular** *JKLMNO*.



6. Sea *V* el número de vértices, *A* el número de aristas y *C* el número de caras. Complétese la siguiente tabla:

Figura	V	E	F
Pirámide triangular			
Pirámide cuadrada			
Cubo			
Prisma triangular			

Hacer una tabla como la del Ejercicio 6 para:

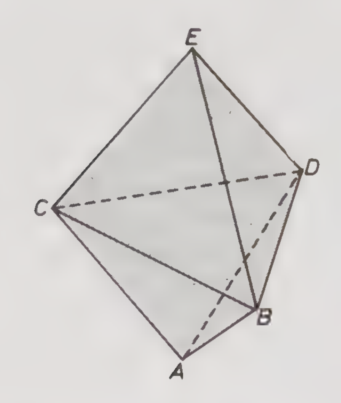
7. Una pirámide de base pentagonal.

8. Un prisma de base pentagonal.

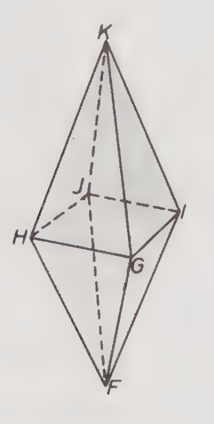
9. Un prisma de base exagonal.

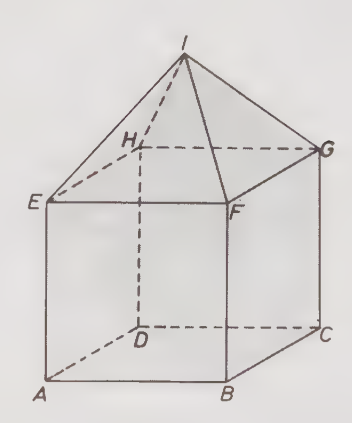
10. Una pirámide de base exagonal.

11. La siguiente figura que representa dos pirámides triangulares con base común.



12. La figura *FGHIJK* que representa dos pirámides cuadradas con base común.





13. La figura *ABCDEFGHI* que representa un cubo con una de sus caras sustituida por las cuatro caras triangulares de una pirámide cuadrada.

14. En las tablas de los Ejercicios del 6 al 13 estúdiense los valores de V, A y C para cada poliedro. Compárese el valor de A con el valor de $V + C$. Establézcase una fórmula para A en términos de V y C. Se trata de la famosa *fórmula de Euler para poliedros.*

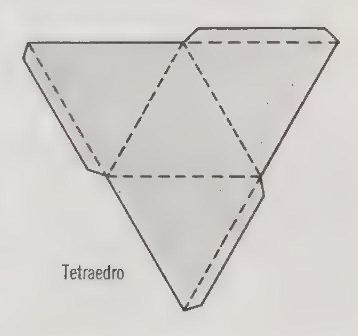
15. El cubo de 3 cm de arista se pinta de rojo y después se corta en 27 cubos de 1 cm de arista.

(a) ¿Cuál es el número mínimo de cortes necesarios para dividir el cubo original en los 27 cubos? (Al hacer los cortes no es necesario mover las piezas que se van obteniendo).

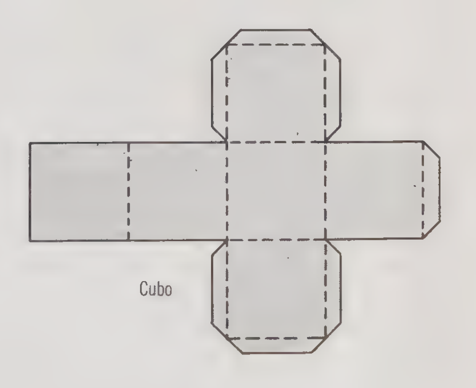
(b) ¿De los 27 cubos, cuántos tienen pintada de rojo, una, dos, tres, más de tres o ninguna de sus caras?

16. Conteste las preguntas del Ejercicio 15 para un cubo de 4 cm de arista que se pinta de rojo y luego se corta en 64 cubos de 1 cm de arista. Repita el proceso para un cubo de 5 cm de arista. ¿Se observa algún modelo?

***17.** Las perspectivas de las figuras en el espacio nunca representan completamente a la figura y son con frecuencia difíciles de visualizar. Considérese el siguiente modelo y hágase uno para un tetraedro.



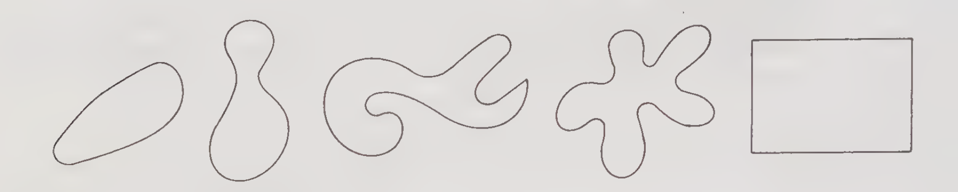
***18.** Como en el Ejercicio 17, considérese el modelo y hágase uno para un cubo.



6-5 CURVAS EN EL PLANO

A lo largo de este capítulo hemos considerado puntos, rectas, pla-

nos, rayos, segmentos de recta, figuras compuestas de segmentos de rectas y rayos, así como regiones de planos determinadas por segmentos de rectas, rayos y semi planos. Estudiaremos ahora otras figuras planas, que pueden ser aproximadas por líneas quebradas y polígonos; nos referimos a las **curvas planas.** Cada una de las siguientes figuras es una **curva simple cerrada.** Obsérvese que un polígono es un caso particular de este tipo de curva.



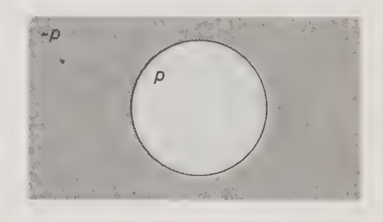
Dos curvas simples cerradas cualesquiera tienen una propiedad común. ¿Puede determinarse cuál? Es obvio que el tamaño, la forma, los ángulos y las rectas no son aquí propiedades comunes. ¿Qué se ha dejado de considerar? Algunos lectores podrán pensar que la propiedad común que queremos establecer es trivial dada su sencillez. Nosotros nos inclinamos a creer que la sencillez radica en todas aquellas propiedades que son realmente básicas en la matemática. La propiedad que nos ocupa podemos enunciarla del modo elemental que sigue: toda curva simple y cerrada tiene un interior y un exterior.

En matemáticas superiores se dice que *toda curva simple y cerrada divide al plano que la contiene en dos regiones.* Es el enunciado del **teorema de la curva de Jordan.** La curva es el límite común de las dos regiones, y no se puede pasar de una región a otra sin cruzar la curva. El teorema de Jordan es de gran importancia pese a su sencillez. Obsérvese que es independiente del tamaño y de la forma de la curva.



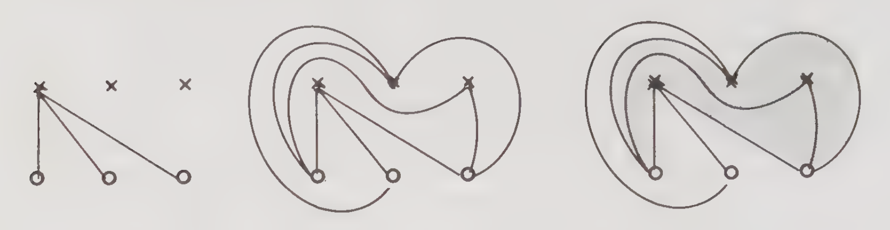
¿Cómo puede un teorema tan sencillo tener tal importancia? En él se basa el supuesto de Euclides de que todo segmento de recta que una el centro de una circunferencia con un punto exterior de la curva, debe contener un punto de la circunferencia. En estudios más avanzados constituye la base para la existencia de un valor que anula a un polinonio en cualquier intervalo en que el polinonio cambie de signo. Proporciona la base para los diagramas de Euler y los diagramas de Venn en cualquier lógica de dos valores (verdadero y falso). En la sección 4-5 considerábamos que todos los puntos del conjunto universal eran puntos o bien de la región circular A o puntos de A', el complemento de A.

En la sección 4-6 hemos considerado proposiciones p que son o bien verdaderas o bien falsas (en cuyo caso $\sim p$ es verdadera), pero no verdaderas y falsas. El teorema de la curva de Jordan nos permite representar proposiciones que son verdaderas (o falsas) por medio de diagramas de Euler y de Venn.

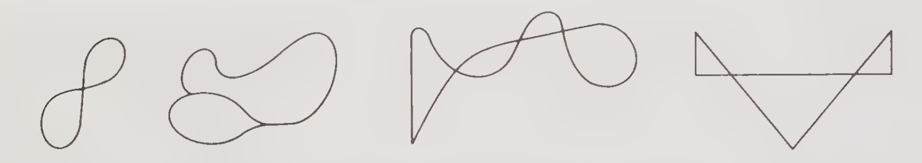


Dicho teorema, que implica la existencia de un interior y de un exterior de cualquier curva simple y cerrada, también puede aplicarse en la solución de problemas como el siguiente, de tipo popular. (Ver §1-4, Ejercicio 4). Consideremos sobre un terreno plano tres casas (×) alineadas en una hilera y tres servicios públicos (0) también alineados en una segunda hilera. El problema consiste en unir cada una de las casas a cada uno de los servicios públicos por medio de líneas sobre el plano de tal forma que las líneas no se crucen. Como se ve en la figura de la izquierda, es fácil unir una de las casas a cada uno de los servicios públicos. También, como se ve en la segunda figura, se puede unir la segunda casa a los tres servicios públicos. En cuanto a la tercera casa, ésta se puede unir a dos de los servicios públicos, pero, según las condiciones del problema, es imposible unirla al tercero. Dicha imposibilidad se basa en el hecho de que la curva simple y cerrada, señalada en la tercera figura, divide al plano en dos regiones; la tercera casa se halla dentro de la curva (región sombreada) en tanto que el ter-

cer servicio se encuentra fuera de la curva y por consiguiente no pueden unirse sin cruzarla.



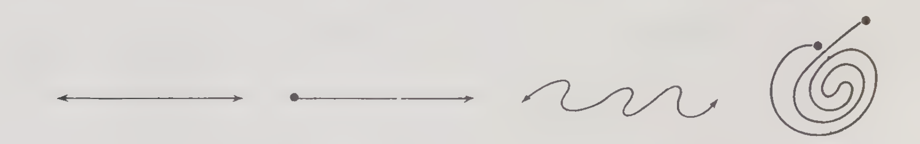
Como en el caso de las líneas quebradas, las curvas planas pueden ser o no ser simples, pueden ser cerradas o abiertas. Cada una de las siguientes figuras es una curva plana que puede ser aproximada por medio de una línea quebrada cerrada no simple. Cada una de las curvas es cerrada y no simple.



Las curvas cerradas que no son simples dividen al plano en tres o más regiones. Los puntos en los que una curva se corta a sí misma son **vértices,** aunque pueden también designarse como vértices otros puntos. Las curvas simples cuyos vértices son puntos extremos y no contienen ningún otro vértice son **arcos.** A cada una de las siguientes curvas se le han señalado tres puntos, como vértices. El número de vértices *V*, de arcos *A* y de regiones *R* en las que el plano queda dividido se señalan debajo de cada figura. La última figura deja al plano sin dividir, dado que para dos puntos cualesquiera *P* y *Q* que sean puntos del plano pero no puntos de la figura, existe una curva plana simple (arco) con *P* y *Q* como puntos extremos que no corta a la figura dada.

V	3	3	3	3	3
A	3	3	4	5	2
R	2	2	3	4	1

Las siguientes figuras pueden ser aproximadas por medio de líneas quebradas simples no cerradas. Se trata de curvas simples no cerradas. Obsérvese que una recta y un rayo son casos especiales de curvas simples no cerradas; por consiguiente, en geometría las curvas no tienen que ser necesariamente "torcidas".



Las figuras siguientes pueden ser aproximadas por medio de líneas quebradas que no son ni simples ni cerradas; cada una de ellas es una curva que no es ni simple ni cerrada.



EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 6-5

Dibújense tres curvas diferentes en apariencia que sean:

1. Simples y cerradas.
2. Simples y no cerradas.
3. Cerradas no simples.
4. Ni simples ni cerradas.

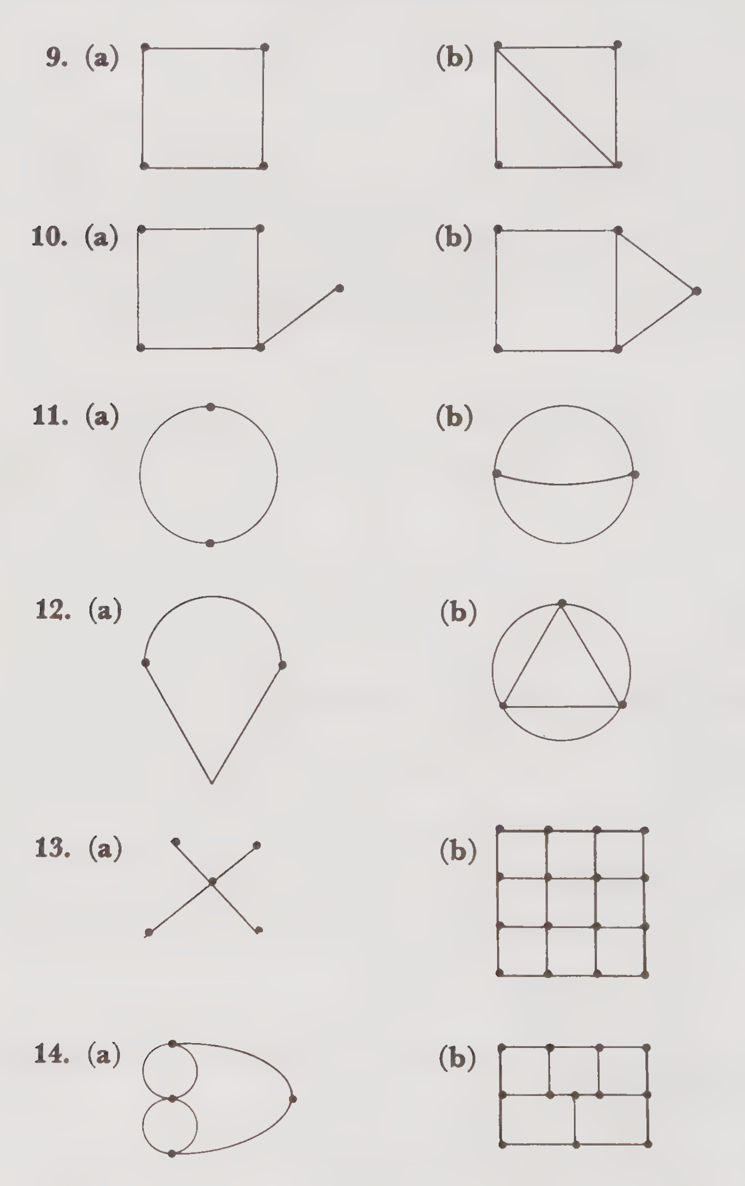
Dibújese una línea quebrada que se aproxime a la siguiente curva dada:

5. Una curva simple y cerrada.
6. Una curva simple no cerrada.

7. Una curva cerrada que no sea simple.

8. Un polígono.

En los Ejercicios del 9 al 14 determinar el número de vértices V, de arcos A y de regiones R para cada figura:



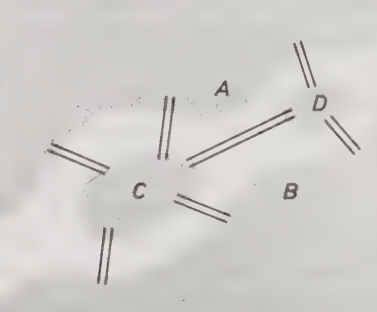
15. Estudiar los valores de *V, A* y *R* obtenidos en los Ejercicios

del 9 al 14. Determinar una expresión para A en términos de V y R. Se obtendrá una forma de la *fórmula de Euler para redes.*

6-6 REDES

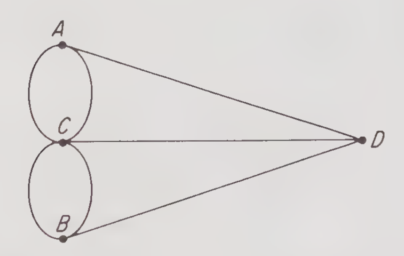
Cualquier conjunto de segmentos de recta (o arcos) forma una **red.** Si la red se puede trazar pasando una sola vez por cada segmento sin necesidad de levantar el lápiz del papel, es decir, en forma continua, entonces la red es **atravesable.** Por ejemplo, cualquier red simple conexa es atravesable. Si además es cerrada, puede entonces elegirse cualquiera de sus puntos como punto inicial del dibujo, que resultará ser también el punto final de la red. Si la red es simple, conexa, pero no es cerrada, entonces la gráfica debe empezarse en uno de los puntos extremos para terminarse en el otro.

Al parecer, el estudio de la posibilidad de atravesar redes tuvo su origen en un problema relativo a los puentes de la ciudad de Königsberg. En dicha ciudad hay un río que la atraviesa, dos islas y siete puentes como se indica en la figura. Los habitantes de Königsberg, amantes de los paseos dominicales, pensaron que sería agradable dar un paseo en el que tuviesen que cruzar cada uno de los siete puentes una sola vez. Se dieron cuenta que era impo-

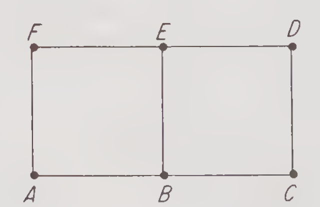


sible cualquiera que fuese el punto de partida y el camino que se siguiese. Con el tiempo se observó que el problema consistía fundamentalmente en conectar las dos orillas del río, A y B, y las dos islas, C y D, como se muestra en la figura. Con la representación del problema por medio de una red, ya no era necesario discutirlo en términos de paseos a través de puentes. En su lugar se planteaba la discusión de si la red asociada al problema era o no transi-

table. El problema se podría resolver si y sólo si su red era atravesable.

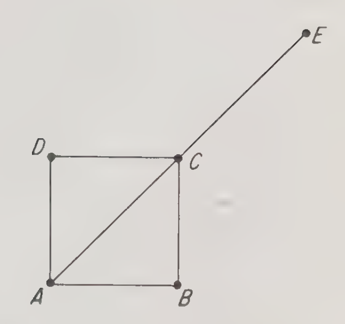


¿Cuándo es atravesable una red? Se puede hacer un recorrido completo alrededor de una manzana de casas sin que sea necesario empezar en un punto determinado. En general, se puede atravesar en forma continua cualquier línea quebrada que sea simple y cerrada. Consideremos ahora el problema de caminar alrededor de dos manzanas de casas y por la calle *BE* que las separa. El problema es un tanto más interesante dada la necesidad de empezar en *B* o en *E*. Además, si se empieza en *B*, se concluye en *E*, y viceversa.



Obsérvese que se permite pasar por uno de los vértices varias veces, pero sólo se puede recorrer una calle una sola vez. La propiedad peculiar de los vértices *B* y *E* consiste en el hecho de que cada uno de dichos puntos extremos es punto extremo de tres segmentos de recta en tanto que cada uno de los otros vértices es punto extremo de dos segmentos de recta. Una observación análoga le permitió al famoso matemático alemán Euler desarrollar una teoría completa sobre redes atravesables.

Euler clasificó los vértices de una red en pares o impares. Por ejemplo, en la figura dada, el vértice *A* es un punto extremo de tres arcos, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ considerándose por consiguiente como vértice impar; *B* es un punto extremo de dos arcos, $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ siendo por lo tanto un vértice par; *C* es un punto extremo de cuatro



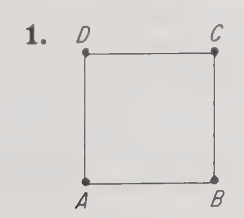
arcos, $\overline{CB}$, $\overline{CA}$, $\overline{CD}$, y $\overline{CE}$, siendo vértice par; E es un punto extremo de un arco $\overline{EC}$, siendo, pues, vértice impar. Así pues, la figura tiene dos vértices impares, A y E, y tres vértices pares, B, C y D. Un vértice de cualquier red que es punto extremo de un número impar de arcos se dice que es un **vértice impar**; un vértice que es punto extremo de un número par de arcos es un **vértice par.** Dado que cada arco tiene dos puntos extremos, en cualquier red habrá necesariamente un número par de vértices impares.

Toda red que sólo tenga vértices pares es atravesable, pudiéndose empezar el trazo en cualquiera de sus vértices. Además, el trazo se concluye en el mismo punto de partida. Si una red sólo tiene dos vértices impares, es atravesable, pero el trazo debe empezarse en uno de los vértices impares y concluirse en el otro. Si una red tiene más de dos vértices impares no es atravesable. En general, una red con $2k$ vértices impares, puede ser atravesada en k trazos continuos distintos. La red del problema de los puentes de Königsberg tiene cuatro vértices impares y por consiguiente no puede ser atravesada mediante un simple trazo. Obsérvese que el problema de los puentes de Königsberg es independiente del tamaño y de la forma del río, de los puentes o de las islas.

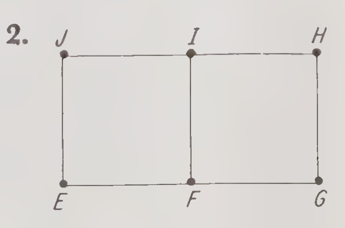
EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 6-6

En los Ejercicios del 1 al 8 determinar: (a) *el número de vértices pares;* (b) *el número de vértices impares;* (c) *dígase si cada una de las redes es o no atravesable. Si es atravesable, dígase qué vértices son posibles puntos de partida.*

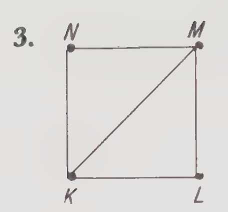
1.



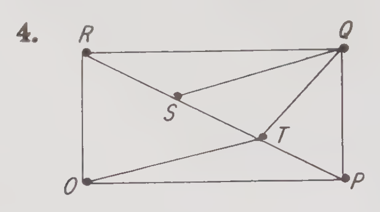
2.



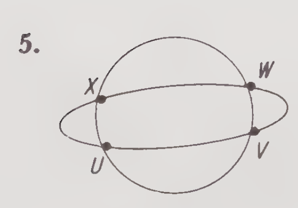
3.



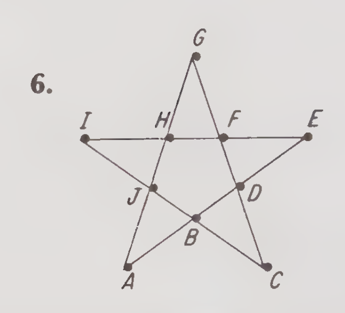
4.



5.



6.

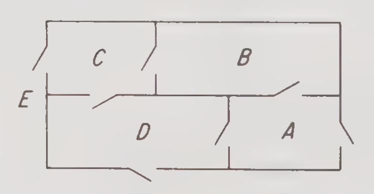


7. La red formada por las aristas de una pirámide triangular.

8. La red formada por las aristas de un cubo.

9. Explíquese cómo un inspector de caminos puede utilizar una red para determinar si puede o no inspeccionar cada sección de un camino sin tener que atravesar dos veces la misma sección.

10. Utilícese una red adecuada para responder y explicar la siguiente pregunta: ¿Es posible recorrer una casa —cuyo plano se señala en la siguiente figura— pasando sólo una vez por cada puerta?



11. Determínese si es posible trazar una línea quebrada simple que corte una sola vez a cada uno de los segmentos de la siguiente figura.



12. Considérese que un viajero que quiere visitar solo una vez cada ciudad utiliza una red de caminos. (a) ¿Es necesario que el viajero recorra una vez al menos cada camino? (b) Considérense cada una de las redes de los Ejercicios del 1 al 14 y determínese si es posible que el viajero pueda visitar cada una de las ciudades sin tener que pasar por el mismo camino. (c) En base a su contestación a la parte (b): ¿Puede resultarle de interés al viajero que la red sea atravesable?

*13. Describa una modificación que haga posible el problema de los puentes de Königsberg.

*14. Describa una modificación en la red del ejercicio 6 de modo que cambie la posibilidad del trazo deseado.

6-7 TOPOLOGIA

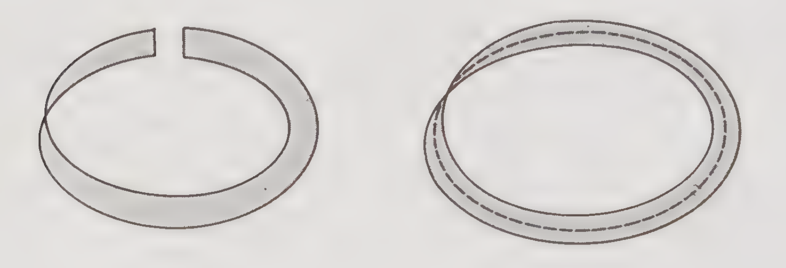
El estudio de puntos, rectas, curvas planas y figuras en el espacio es parte de la geometría. En la actualidad existen diversos géneros de geometrías. Mencionaremos dos de ellos.

En la geometría euclidiana se pueden medir segmentos de recta; se pueden medir ángulos; se pueden determinar áreas de triángulos. Dos segmentos de recta que tengan la misma longitud y dos ángulos que tengan la misma medida, se dice que son congruentes. Son congruentes también dos triángulos que tengan el mismo tamaño (área) y forma (cada uno de los ángulos de un triángulo es igual a cada uno de los ángulos del otro). Probablemente el lector ya ha estudiado esta geometría de las figuras y sus medidas. Dado que se trata de una geometría relativa a medidas, se le da el nombre de **geometría métrica.**

El estudio de curvas cerradas simples, redes y otras curvas planas como las que se han considerado, independientemente de la noción de medida, pertenece a una **geometría no métrica.** Los tópicos que se han mencionado forman parte de una geometría especial conocida bajo el nombre de **topología.**

Se han seleccionado temas que ponen de manifiesto la necesidad de definiciones precisas, así como el uso de conjuntos de elementos, tanto en geometría métrica como en geometría no métrica. En el Capítulo 10 se considerarán otras diversas cuestiones. No obstante, la limitación de esta obra imposibilita un estudio detallado de la geometría.

Continuaremos la consideración de la topología con algunos comentarios acerca de una superficie que presenta propiedades poco usuales Se trata de una superficie de un solo lado. Una mosca podría caminar entre dos puntos cualesquiera de ella sin cruzar ninguna arista. A diferencia de cualquier otra superficie, ésta no tiene ni parte superior ni inferior, ni arriba ni abajo. Dicha superficie recibe el nombre **de banda de Möbius** y puede construirse fácilmente con una tira rectangular de papel. Si bien el tamaño de la tira no entra en consideración, para mayor comodidad en el manejo se aconseja una banda de unos 5 cm de ancho y 30 cm de largo. La banda de Möbius se construye dándole a la tira de papel una torsión de media vuelta y pegando entonces sus extremos. Si cortamos ahora la banda transversalmente, volveremos a obtener la banda original. Pero si cortamos la banda de Möbius longitudinalmente por el centro (véase la línea punteada de la segunda figura), en este caso no se obtienen dos bandas, como podría esperarse, sino que se obtiene una sola banda con dos torsiones.



En cierta ocasión, con motivo de la fiesta de cumpleaños de un niño de siete años, se dio a cada uno de los invitados una banda de Möbius. Mientras esperaban el postre, se les pidió que cortasen la banda por la mitad y dijesen el resultado que esperaban obtener. Quedaron desconcertados al obtener una sola banda, lo que les llevó a cortarla de nuevo. El desconcierto fue mayor al obtener dos bandas eslabonadas. Un año más tarde uno de los niños preguntaba por la banda de papel que permaneció en una sola pieza pese a haberse cortado en dos.

Ante propiedades tan poco usuales como las de la banda de Möbius, tanto los jóvenes como los adultos, plantean preguntas que la mayor parte de los profesores de matemáticas a los que pueden recurrir no están en condiciones de contestar. Esto es positivo puesto que nos hace ver que las matemáticas consisten en algo más

que simples operaciones algebraicas y las clásicas construcciones geométricas.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 6-7

1. Construir una banda de Möbius y cortarla por el centro a fin de obtener una banda con dos torsiones.

2. Repetir el Ejercicio 1 y cortarla nuevamente por el centro.

3. Construir una banda de Möbius y cortarla a lo largo de una línea que esté más o menos a un tercio del ancho de la banda.

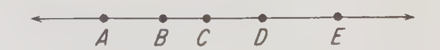
4. Constrúyase una banda de Möbius y márquese en ella un punto A. Trácese un arco a partir de A alrededor de la banda hasta llegar nuevamente al punto A.

5. Explíquese por qué la banda Möbius recibe el nombre de superficie de una sola cara.

6. ¿La banda de Möbius tiene por arista una o dos curvas cerradas simples? Razone su respuesta.

EXAMEN RELATIVO AL CAPITULO 6

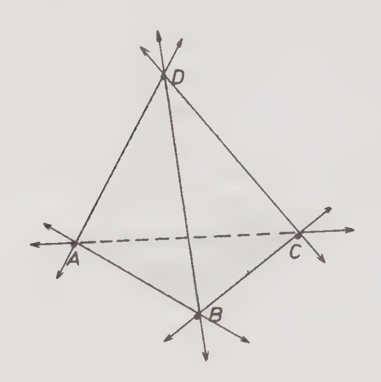
1. Dada la figura identificar cada uno de los siguientes conjuntos de puntos: **(a)** $BD \cap CA$; **(b)** $CD \cup CB$.



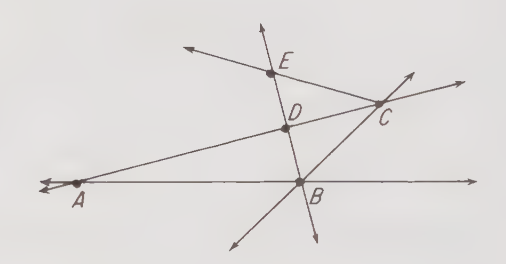
2. Dibujar dos rayos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tales que $\overrightarrow{PQ} \cap \overrightarrow{RS}$ sea: **(a)** un segmento de recta; **(b)** un rayo.

3. Dibujar: **(a)** una curva simple que no sea cerrada; **(b)** un polígono convexo con cinco lados.

4. Considérense las seis rectas a lo largo de las aristas de la pirámide triangular $ABCD$ de la figura. Identificar las rectas que: **(a)** cortan a $\overleftrightarrow{AB}$ en un solo punto; **(b)** que se cruzan con $\overleftrightarrow{AB}$.



5. Dada la figura identificar cada uno de los siguientes conjuntos de puntos: (a) $\angle ABC \cap \angle CDE$; (b) (interior $\triangle ABC$) $\cap \overleftrightarrow{DE}$.



6. En la Figura del Ejercicio 5, señálense: (a) un ángulo que no tenga ningún punto interior; (b) dos triángulos tales que la intersección de sus puntos interiores sea el conjunto de los puntos interiores del $\triangle BCD$.

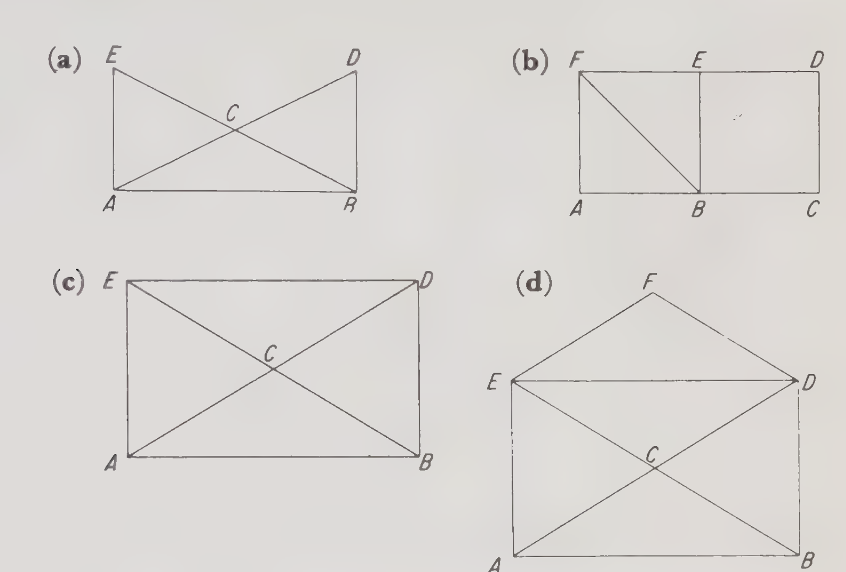
7. Dibújese un cubo, asígnense letras a sus vértices y nómbrense en correspondencia sus aristas.

8. Considérese un prisma triangular y determínese el número de: (a) vértices; (b) aristas.

9. Dibújese: (a) una curva que no sea ni simple ni cerrada; (b) una red con dos vértices pares e impares.

10. Considerando las siguientes figuras dígase si la red es atra-

vesable. Cuando lo sea, señálense los vértices que pueden ser puntos de partida.



Capítulo 7

UNA INTRODUCCION AL ALGEBRA

El álgebra es una extensión de la aritmética de los números enteros, de los números racionales y de los números reales que se han estudiado en el Capítulo 5. En nuestro estudio del álgebra consideraremos primero los enunciados. Los enunciados en los que solamente intervienen números y operaciones sobre números pueden identificarse como verdaderos o como falsos. El álgebra difiere de la aritmética en que los enunciados en álgebra incluyen también *variables;* es decir, símbolos que pueden sustituirse por cualquier miembro de un conjunto de elementos. Los enunciados en los que intervienen variables pueden ser verdaderos para algunas sustituciones de las variables, y falsos para otras.

En este capítulo veremos también la interrelación entre el álgebra y la geometría, cuando estudiemos las gráficas de las propo-

siciones. Primero estudiaremos gráficas sobre la recta y después las gráficas sobre el plano. Por lo que hace a estas últimas estamos en deuda con el matemático francés René Descartes (1596-1650), cuyos descubrimientos proporcionaron una interpretación geométrica para las proposiciones algebraicas en dos variables, dando lugar con ello a la rama de las matemáticas que se conoce como geometría analítica.

7-1 PROPOSICIONES Y GRAFICAS

Se da por hecho que el lector conoce por sus estudios de la lengua castellana el significado del vocablo proposición. Consideraremos dos tipos de proposiciones. Proposiciones tales como $2 + 3 = 5$, que pueden identificarse como verdaderas y proposiciones como por ejemplo $2 \times 3 = 7$ que pueden identificarse como falsas. Dichos tipos de proposiciones reciben el nombre de **enunciados.** Las proposiciones tales como $x + 2 = 5$, que no pueden identificarse como verdaderas o falsas a menos que se dé mayor información sobre ellas, reciben el nombre de **proposiciones abiertas.**

Se da por sentado que una proposición no puede ser a la vez verdadera y falsa. Se dan a continuación algunos ejemplos de enunciados; es decir, proposiciones que son unas verdaderas y otras falsas:

$8 \times 2 = 16$ (proposición verdadera de igualdad)
$7 - 3 = 5$ (proposición falsa de igualdad)

Las proposiciones de igualdad, lo mismo si son verdaderas que si son falsas reciben el nombre de **ecuaciones.** También pueden escribirse **proposiciones de desigualdad** utilizando el símbolo que se introdujo en la sección 5-7. Considérense los siguientes ejemplos:

$5 - 2 \neq 4$ (proposición verdadera de desigualdad)
$8 \times 3 \neq 24$ (proposición falsa de desigualdad)
$12 > -3$ (proposición verdadera de desigualdad)
$-3 < -5$ (proposición falsa de desigualdad)

A continuación se dan algunos ejemplos de proposiciones abiertas (ni verdaderas ni falsas):

$x + 2 = 7$ $x + 2 \neq 5$
$x - 3 = 4$ $x - 3 > 7$

En cada uno de los ejemplos anteriores, el símbolo x recibe el nombre de *variable*. Una **variable** hace el papel de un hueco preparado para albergar sus sustituciones. En cada caso, la proposición no es ni verdadera ni falsa hasta que no se haga una sustitución de la variable. Después de hacerse la sustitución se obtiene un enunciado que puede clasificarse como verdadero o falso.

EJEMPLO 1: Determinar una sustitución para x tal que la proposición abierta $x - 1 = 3$ dé lugar a un enunciado verdadero de igualdad.

Solución: Para $x = 4$ se tiene la proposición verdadera $4 - 1 = 3$. Para toda otra sustitución de x se tiene una proposición falsa de igualdad.

En el Ejemplo 1, la sustitución 4 para x recibe el nombre de **solución** de la proposición abierta dada.

EJEMPLO 2: Determinar todas las posibles sustituciones para x tales que la proposición $x - 1 \leq 3$ dé lugar a una proposición verdadera de desigualdad, siendo x entero positivo.

Solución: La proposición es verdadera si x se sustituye por 0, 1, 2, 3 o 4.

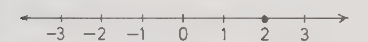
El conjunto de las soluciones que hacen verdadera una proposición recibe el nombre de **conjunto solución** de la proposición dada para el conjunto de sustitución dado. En el Ejemplo 2 el conjunto solución es $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. En los siguientes ejemplos obsérvese que para diferentes conjuntos de sustitución puede haber diferentes conjuntos solución para la proposición dada.

Proposición	*Conjunto de sustitución*	*Conjunto solución*
$x - 1 \leq 3$	Números naturales	$\{1, 2, 3, 4\}$
$x - 1 \leq 3$	Números positivos	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$
$x - 1 \leq 3$	Enteros	$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
$x - 1 \leq 3$	Números reales	Todos los números reales menores o iguales a 4

Los conjuntos solución de las proposiciones abiertas pueden ser representados gráficamente sobre una recta numérica. Se hacen gráficas para representar el conjunto de puntos que corresponde al conjunto solución de la proposición, dándose a esto el nombre de **gráfica** de la ecuación o desigualdad. Los ejemplos que siguen ilustran varios tipos de gráficas. En cada uno de ellos se debe representar gráficamente la proposición abierta dada para el conjunto de sustitución que se indica.

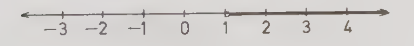
EJEMPLO 3: $x + 3 = 5$, x entero.

Solución: El conjunto solución consta del único elemento $\{2\}$. Dicho conjunto solución se representa gráficamente señalando sobre la recta numérica el punto de coordenada 2. La gráfica consiste en un solo punto.



EJEMPLO 4: $x + 2 > 3$, x número real.

Solución: El conjunto solución consta de todos los números reales mayores que 1. La gráfica del conjunto solución se puede hacer señalando un punto en blanco sobre el 1 de la recta numérica, para indicar que no es elemento del conjunto solución, y trazando una flecha en grueso, para hacer ver que todos los números mayores que 1 satisfacen la desigualdad dada. La gráfica es una *semi recta.*



EJEMPLO 5: $x + 2 \geq 3$, x número real.

Solución: Esta proposición se lee: "$x + 2$ es mayor o igual que 3". Por consiguiente es verdadera para $x = 1$ y para $x > 1$. En la gráfica de la proposición se reconoce un *rayo*.



EJEMPLO 6: $-2 \leq x \leq 1$, x número real.

Solución: Dicha proposición es verdadera cuando x se sustituye por cualquier número real *desde* —2 *hasta* 1. La gráfica es un *segmento de recta.*



EJEMPLO 7: $-2 < x < 1$, x número real.

Solución: El conjunto solución consta de todos los números reales *comprendidos entre* —2 y 1. La gráfica recibe el nombre de *intervalo abierto;* es decir, un segmento sin ninguno de sus puntos extremos.



EJEMPLO 8: $-1 < x \leq 3$, x entero.

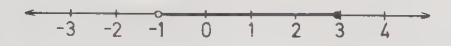
Solución: Esta desigualdad establece que x es mayor que —1 pero menor o igual que 3. El conjunto solución consta de los elementos $\{0, 1, 2, 3\}$. La gráfica es la siguiente:



Para el conjunto de sustitución dado en este ejemplo, el conjunto solución para $x \leq 3$ es $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, 3\}$; el conjunto solución para $-1 < x$ es $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Por consiguiente el conjunto solución para $-1 < x \leq 3$ puede considerarse como la *intersección* de estos dos conjuntos.

EJEMPLO 9: $-1 < x \leq 3$, x número real.

Solución: Esta es la misma proposición que la del Ejercicio 8 pero con un conjunto de sustitución diferente. La gráfica del conjunto solución incluye en este caso todos los puntos de la recta numérica comprendidos entre -1 y $+3$, incluyendo a $+3$ pero no a -1. La gráfica consiste en un segmento con sólo uno de sus puntos extremos. No es ni un segmento abierto (Ejemplo 7) ni un segmento cerrado (Ejemplo 6).



EJEMPLO 10: $x + 3 = 3 + x$, x número real.

Solución: Esta proposición es verdadera para todos los valores posibles de x. El conjunto solución es el conjunto de todos los números reales; la gráfica del conjunto solución es toda la recta numérica.

-2 -1 0 1 2

Toda proposición que sea verdadera para todas las sustituciones de sus variables recibe el nombre de **identidad.** Así, la proposición del Ejemplo 10 es una identidad.

EJEMPLO 11: $x + 2 = x$, x entero.

Solución: No existe ningún entero tal que la suma de dicho entero y 2 sea igual al entero. El conjunto solución es el conjunto vacío y en este caso no existe gráfica.

Hagamos un resumen de los conceptos considerados en esta sec-

ción. Una proposición abierta en una variable divide al conjunto de sustitución de la variable en dos *subconjuntos:* uno de los subconjuntos consta de las sustituciones que hacen verdadera a la proposición; el otro subconjunto consiste en las sustituciones que hacen falsa a la proposición. Una sustitución que hace verdadera a la proposición es una *solución* de la proposición. El conjunto de todas las soluciones es el *conjunto solución* de la proposición. La *gráfica* de una ecuación o de una desigualdad es la gráfica de su conjunto solución.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 7-1

Dígase si cada uno de los siguientes enunciados es **(a)** *un enunciado de igualdad o de desigualdad;* **(b)** *un enunciado verdadero, un enunciado falso o una proposición abierta.*

1. $7 \times 8 = 54$

2. $17 + 13 = 30$

3. $\frac{2}{3} < \frac{5}{6}$

4. $\frac{1}{2} > \frac{4}{7}$

5. $\frac{8}{12} \geq \frac{2}{3}$

6. $\frac{25}{30} \leq \frac{5}{6}$

7. $7 \times 11 \neq 75$

8. $19 \times 21 = 20^2 - 1$

9. $39 \times 41 = 40^2 - 1$

10. $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$

11. $8(5 + 3) = 8 \times 5 + 8$

12. $(3) - (2) = (-2) - (3)$

13. $7 - 3 \neq 9 - 5$

14. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \neq 4\frac{2}{3} - 4\frac{1}{2}$

15. $\frac{432}{796} > \frac{432}{795}$

16. $-\frac{432}{796} < -\frac{432}{795}$

Para cada una de las siguientes proposiciones, dígase si la gráfica del conjunto solución es un punto, una semirrecta, un rayo, un segmento, una recta o el conjunto vacío. En todos los casos el conjunto de sustitución es el conjunto de los números reales.

17. $x - 1 = 3$

18. $x + 2 \leq 5$

19. $x + 2 = x$

20. $x + 5 = 5 + x$

21. $x - 3 > 2$

22. $-2 \leq x \leq 5$

23. $0 \leq x \leq 3$

24. $x + 2 < 7$

25. $x + 1 > x$

26. $5 \leq x + 1$

Hacer la gráfica de cada una de las siguientes proposiciones considerando a x como un número real.

27. $2x - 1 = 7$

28. $2x < 8$

29. $-3 < x < 2$

30. $-1 \leq x \leq 3$

31. $x + 3 < 7$

32. $x - 2 > 1$

33. $x - 1 \geq 2$

34. $x + 2 \leq 3$

35. $x - 1 < x$

36. $x + 1 \neq 1 + x$

37. $x + 2 \not< 3$

38. $-2 < x \leq 2$

***39.** $x^2 \leq 9$

***40.** $x^2 \geq 9$

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 7-1

Se utiliza a veces el símbolo $[a, b]$ para representar un conjunto de puntos sobre una recta comprendidos en el intervalo de a a b, con ambos extremos a y b incluidos en el conjunto. Para puntos enteros, $[2, 6] = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Para un intervalo de números reales, $[2, 6]$ representa a todos los números reales comprendidos entre 2 y 6, ambos incluidos.

Se utiliza el símbolo (a, b) para representar los puntos del intervalo comprendidos entre a y b, ambos extremos excluidos. Se puede utilizar una combinación de estos símbolos para indicar que un extremo se incluye pero el otro no. Así, $[a, b)$ representa los puntos del intervalo comprendidos entre a y b, incluyendo a a pero no a b. El símbolo $[a, b]'$ se utiliza para representar el complemento del intervalo $[a, b]$.

Enumérense y después señálense sobre una recta numérica los elementos enteros de cada uno de los siguientes conjuntos:

1. $[2, 4] \cup [1, 5]$

2. $[3, 7] \cup [1, 3]$

3. $[2, 5] \cap [3, 7]$

4. $[3, 5] \cap (5, 8]$

5. $(2, 5] \cup [3, 7)$

6. $[4, 9) \cap [8, 10)$

Para cada uno de los siguientes ejercicios sea $U = [-10, 10]$ un intervalo de números reales. Hágase la gráfica de cada uno de los

siguientes conjuntos y enúnciese los resultados utilizando los símbolos para intervalos de números reales.

7. $[-2, 3] \cup [2, 5]$ **8.** $[-3, 5] \cap [2, 7]$

9. $(-1, 5] \cap [0, 8)$ **10.** $[-5, 2) \cup [2, 4)$

11. $[-10, 3) \cup (5, 10]$ **12.** $[-5, 2]'$

13. $\{[-7, 2] \cap [3, 5]\}'$ **14.** $[-10, 10]'$

15. $\{[-2, 5] \cup [3, 8]\} \cap \{[-5, 7] \cap [-3, 3]\}$

16. $\{(3, 7] \cap [-1, 2)\} \cup \{[-1, 2] \cap [-2, 1]\}$

7-2 PROPOSICIONES COMPUESTAS

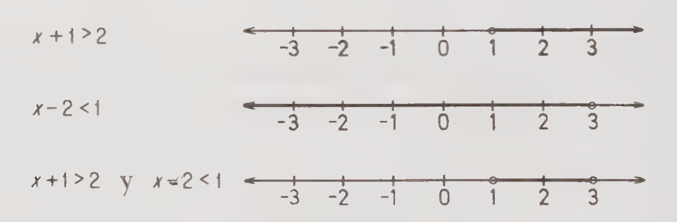
En el Capítulo 4, Sección 4-7, hemos considerado proposiciones compuestas. Ahora analizaremos proposiciones algebraicas compuestas. Por ejemplo, consideremos la siguiente proposición compuesta:

$$x + 1 > 2 \text{ y } x - 2 < 1$$

La proposición $x + 1 > 2$ es verdadera para toda x mayor que 1;
La proposición $x - 2 < 1$ es verdadera para toda x menor que 3.
Recuérdese que una proposición compuesta de la forma $p \wedge q$ (p y q) es verdadera sólo cuando ambas partes son verdaderas.

Por consiguiente, la proposición compuesta dada es verdadera para el conjunto de los elementos de la *intersección* de los dos conjuntos.

Gráficamente podemos ver esto como sigue:



La gráfica de la proposición compuesta consiste en un intervalo abierto que puede describirse de la forma

$$0 < x < 3.$$

Podemos escribir el conjunto solución de la proposición compuesta aplicando la **notación de conjuntos,** como sigue:

$$\{x \mid x > 1\} \cap \{x \mid x < 3\}$$

Esto se lee: "la intersección del conjunto de las x tales que x es mayor que 1 y el conjunto de las x tales que x es menor que 3".

Obsérvese que en este caso no se especificó ningún conjunto de sustitución para x. Cuando tal es el caso, consideraremos que el conjunto de sustitución es el conjunto de los números **reales.**

EJEMPLO 1: Determinar el conjunto solución:

$$x \geq -2 \text{ y } x + 1 \leq 4;\ x \text{ entero.}$$

Solución: Aquí se quiere determinar el conjunto de los enteros que son mayores o iguales a -2 pero, al mismo tiempo que son menores o iguales a 3. (Si $x + 1 \leq 4$, entonces $x \leq 3$.) El conjunto solución es $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

EJEMPLO 2: Determinar el conjunto solución cuando el conjunto de sustitución es el de los números reales:

$$x + 3 < 5 \text{ y } 3 < 1$$

Solución: Se observará que la segunda parte de la proposición $(3 < 1)$ es falsa. Si parte de una proposición de la forma $p \wedge q$ es falsa, entonces, como se recordará, toda la proposición es falsa. Por consiguiente el conjunto solución es el conjunto vacío.

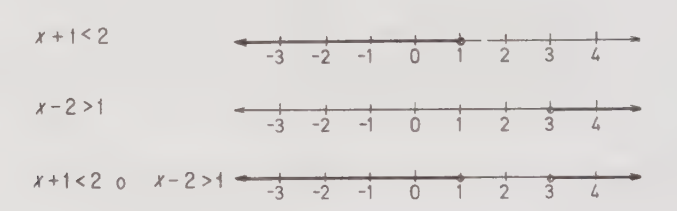
Consideremos ahora una proposición compuesta en la que interviene la conjunción "o".

$$x + 1 < 2 \quad \text{o} \quad x - 2 > 1.$$

La proposición $x + 1 < 2$ es verdadera para toda x menor que

1; la proposición $x - 2 > 1$ es verdadera para toda x mayor que 3.

Recuérdese que una proposición de la forma $p \vee q$ (p o q) es verdadera a menos que ambas partes sean falsas. Por consiguiente la proposición compuesta dada es verdadera para el conjunto de los elementos de la *unión* de los dos conjuntos. Gráficamente se tiene lo siguiente:



La gráfica de la proposición compuesta consiste de la unión de las dos semirrectas; puede escribirse en notación de conjuntos como sigue:

$$\{x \mid x < 1\} \cup \{x \mid x > 3\}$$

Esto se lee: "la unión del conjunto de todas las x tales que es menor que 1 y el conjunto de todas las x tales que x es mayor que 3".

EJEMPLO 3: Determinar el conjunto solución cuando el conjunto de sustitución es el de los números reales:

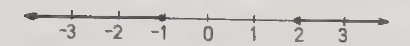
$$5 > 1 \quad \text{o} \quad x + 2 < 5.$$

Solución: Dado que la primera parte de la proposición es verdadera, toda la proposición es verdadera. El conjunto solución es todo el conjunto de los números reales.

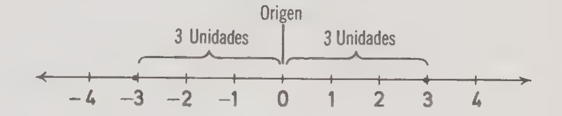
EJEMPLO 4: Representar gráficamente el conjunto solución:

$$x \leq -1 \quad \text{o} \quad x \geq 2.$$

Solución: La gráfica es la unión de los dos rayos.



Sobre la recta numérica se puede ver que hay dos puntos que están a una distancia de 3 unidades del origen; tienen respectivamente por coordenada 3 y -3. Se utiliza el símbolo $|x|$, que se lee "el *valor absoluto* de x", para representar la distancia de un punto al origen de la recta numérica.



Por el diagrama podemos ver que

$$|3| = 3 \text{ y } |-3| = 3.$$

En general, se define el **valor absoluto** de cualquier número real k como sigue:

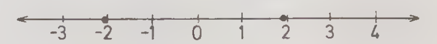
$$\begin{aligned} |k| &= k, && \text{si } k \text{ es positivo;} \\ |k| &= -k, && \text{si } k \text{ es negativo;} \\ |k| &= 0, && \text{si } k = 0. \end{aligned}$$

Obsérvese que en el segundo caso si k representa un número negativo, entonces $-k$ representa un número positivo. Por ejemplo, si $x = -3$, $|-3| = -(-3) = 3$.

Una proposición de la forma $|x| = 2$ puede ahora escribirse como una proposición compuesta:

$$x = 2 \text{ o } x = -2.$$

El conjunto solución de la proposición $|x| = 2$ es el conjunto de las coordenadas de los puntos que están sobre una recta numérica a 2 unidades del origen. Por consiguiente el conjunto solución es $\{2, -2\}$ cuya gráfica es:

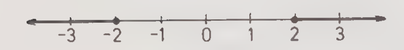


EJEMPLO 5: Representar gráficamente el conjunto solución de $|x| \geq 2$.

Solución: Tiene que determinarse el conjunto de todos los puntos sobre la recta numérica que están a dos unidades o más del origen.

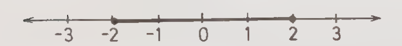
Obsérvese que el conjunto solución de este ejemplo puede escribirse en la forma de la proposición compuesta.

$$x \leq -2 \text{ o } x \geq 2.$$



EJEMPLO 6: Representar gráficamente el conjunto solución de $|x| \leq 2$.

Solución: La gráfica consta de todos los puntos sobre la recta numérica que están a dos unidades o menos del origen.



El conjunto solución puede escribirse como la proposición compuesta.

$$x \geq -2 \text{ y } x \leq 2.$$

EJEMPLO 7: Determinar el conjunto solución de $|x - 1| = 2$.

Solución: Si el valor absoluto de un número es 2, entonces el número debe ser: igual a 2 o -2. Es decir, la proposición dada puede escribirse como la proposición compuesta:

$$x - 1 = 2 \text{ o } x - 1 = -2.$$

Si $x - 1 = 2$, entonces $x = 3$; si $x - 1 = -2$, entonces $x = -1$. El conjunto solución es $\{3, -1\}$.

EJEMPLO 8: Determinar el conjunto solución de:

$$\{x \mid (x-1)(x+2)=0\}$$

Solución: El producto de dos números es cero si y sólo si uno al menos de los números es cero. Es decir, para todos los números reales a y b, si $a \times b = 0$ entonces $a = 0$, o $b = 0$ o $a = 0$ y $b = 0$. Por consiguiente, si $(x-1)\ (x+2) = 0$, entonces $x - 1 = 0$ o $x + 2 = 0$. El conjunto solución es $\{1, -2\}$.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 7-2

Dése la lista de los elementos del conjunto solución para x entero:

1. $x \geq -1$ y $x \leq 2$.
2. $x \leq 3$ y $x \geq -2$.
3. $x \leq 0$ o $x > 0$.
4. $x \geq -2$ y $x < 0$

Representar gráficamente el conjunto solución para x número real:

5. $x \leq 2$ y $x \geq -1$.
6. $x \geq -2$ y $x \leq 3$.
7. $x > 1$ y $x < 3$.
8. $x < 2$ y $x > -3$.
9. $x + 1 < 5$ y $x - 1 > 2$.
10. $x + 2 > 2$ y $x - 1 < 3$.
11. $x \leq 0$ o $x \geq 3$.
12. $x \geq 2$ o $x \leq -1$.
13. $x > 2$ o $x < -1$.
14. $x < -3$ o $x > 1$.
15. $x - 1 > 3$ o $x + 2 < 3$.
16. $x + 2 < 0$ o $x - 2 > 1$.
17. $7 > 5$ y $x - 1 < 2$.
18. $2 < 0$ y $x + 3 > 5$.
19. $5 < 0$ o $x \geq 2$.
20. $3 > -3$ o $x \leq 2$.
21. $\{x \mid x - 1 < 0\} \cup \{x \mid x + 2 > 5\}$
22. $\{x \mid x + 2 > 0\} \cap \{x \mid x - 2 < 3\}$
23. $\{x \mid (x-2)(x-1) = 0\}$
24. $\{x \mid (x+3)(x-2) = 0\}$
***25.** $\{x \mid (x-3)(x+2) \geq 0\}$
***26.** $\{x \mid (x+2)(x-3) \leq 0\}$

Hallar el valor de:

27. $|-5|$
28. $|-3| + |-7|$
29. $|(-3) + (-7)|$
30. $-3 \times |-7|$

Escribir cada proosición como una proposición compuesta y representar gráficamente a el conjunto solución:

31. $|x| = 3$
32. $|x| = 5$
33. $|x| \leq 3$
34. $|x| \geq 5$
35. $|x - 2| = 3$
36. $|x + 1| = 2$

*37. $|x - 1| \leq 3$

*38. $|x + 2| \geq 2$

*39. $-2 < x < 1$ o $|x| = 3$.

*40. $1 \leq |x| \leq 5$

7-3 EXPRESIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Una proposición abierta como, por ejemplo, $x + y = 8$ sigue siendo proposición abierta si sólo se sustituye una de las variables. Por ejemplo, si x se sustituye por 5, se obtiene la proposición $5 + y = 8$ que sigue siendo una proposición abierta. Por consiguiente hace falta un *par* de sustituciones para determinar si una proposición abierta en dos variables es verdadera o falsa para dichas sustituciones.

Si x se sustituye por 5 y y se sustituye por 3, la proposición $x + y = 8$ es verdadera. Es costumbre considerar los variables como un *par ordenado* (x, y) y las sustituciones como un par ordenado de números $(5, 3)$. Se ha convenido en considerar a la variable x como la primera de las dos variables, tomándose el primer número ordenado de números como la sustitución para x; la variable y se considera como la segunda variable y el segundo número del par ordenado como la sustitución para y. Por ejemplo, el par ordenado $(3, 2)$ implica que $x = 3$ y $y = 2$; el par ordenado $(2, 3)$ implica que $x = 2$ y $y = 3$.

La proposición $x + y = 8$ es verdadera o falsa para ciertos pares ordenados de números. Es verdadera para $(5, 3)$; es falsa para $(2, 7)$. El conjunto solución para la proposición $x + y = 8$ es un conjunto de pares ordenados de números para los cuales la proposición es verdadera. Dicho conjunto solución puede indicarse en notación de conjuntos como sigue:

$$\{(x, y) \mid x + y = 8\}$$

leyéndose como "el conjunto de pares ordenados (x, y) tales que $x + y = 8$. La solución conjunto de cualquier proposición en dos variables es un conjunto de pares ordenados.

Como en el caso de las proposiciones con una variable, el conjunto solución de una proposición con dos variables depende de los conjuntos de sustitución que se utilizan para las variables. Por ejemplo, si el conjunto de sustitución para x y y es el conjunto de los números naturales, entonces el conjunto solución para $x + y$ es

$$\{(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1)\}.$$

EJEMPLO 1: Determinar el conjunto solución para la proposición $x + y \leq 2$ si el conjunto de sustitución para x y y es el conjunto de los naturales incluido el cero.

Solución: Para $x = 0$, y tiene que ser menor o igual a 2. Para $x = 1$, y tiene que ser menor o igual a 1. Para $x = 2$, $y = 0$. ¿Puede ser $x = 3$? El conjunto solución es $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$.

Un conjunto de pares ordenados puede obtenerse de cualquier conjunto de números. Por ejemplo, consideremos el conjunto de números.

$$U = \{1, 2, 3\}.$$

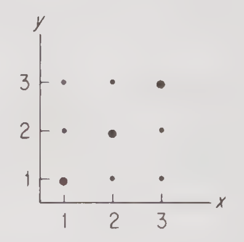
Entonces, el conjunto de todos los pares ordenados de números tomados en U consta de los pares de números cuyos elementos son ambos elementos de U. Dicho conjunto de pares ordenados se conoce como el **producto cartesiano** de U por U que se expresa como $U \times U$, leyéndose "U cruz U". El conjunto de todos los pares ordenados cuyas coordenadas pertenecen al conjunto dado U es:

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

La gráfica de $U \times U$ está dada por los nueve puntos de la figura adjunta; a este tipo de conjunto de puntos se le suele dar el nombre de **reticulado.**



Podemos ahora utilizar esta figura para representar gráficamente los conjuntos solución de proposiciones enunciadas en este universo dado. Por ejemplo, el conjunto solución de $y = x$ para $U = \{1, 2, 3\}$ es $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. La gráfica de dicho conjunto solución —es decir, la gráfica de la proposición— se señala por medio de puntos gruesos en los puntos que corresponden a estos pares ordenados.



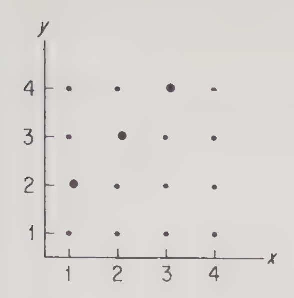
En los siguientes ejemplos se analizan las gráficas de las proposiciones enunciadas en otros universos. Para cada una de ellas se dibujará la gráfica del conjunto solución.

EJEMPLO 2: $\{(x, y) \mid y = x + 1\}$; $U = \{1, 2, 3, 4\}$.

Solución: En este caso el conjunto de las posibles sustituciones está formado por un conjunto de 16 pares ordenados de números, es decir un reticulado de 16 puntos. El conjunto de los pares ordenados que hacen verdadera a la proposición —el conjunto solución— es:

$$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}.$$

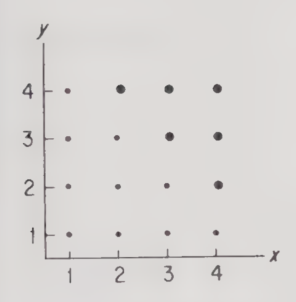
Dichos pares se indican con puntos gruesos en la siguiente gráfica del conjunto solución.



EJEMPLO 3: $\{(x, y) \mid x + y \geq 6\}$; $U = \{1, 2, 3, 4\}$.

Solución: Para $x = 1$ no existe ningún valor en el dominio de y que satisfaga la desigualdad. Para $x = 2$, $y = 4$; para $x = 3$, $y = 3$ o 4; y para $x = 4$ $y = 2$, 3 o 4. El conjunto solución es:

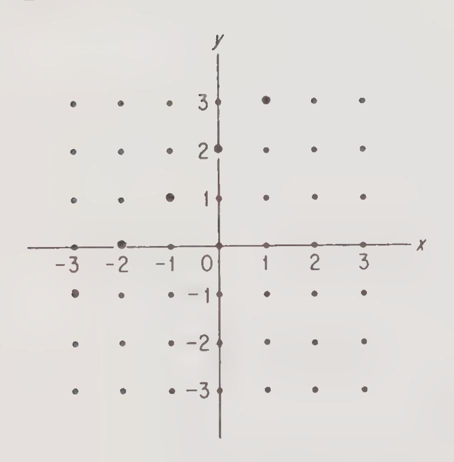
$$\{(2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}.$$



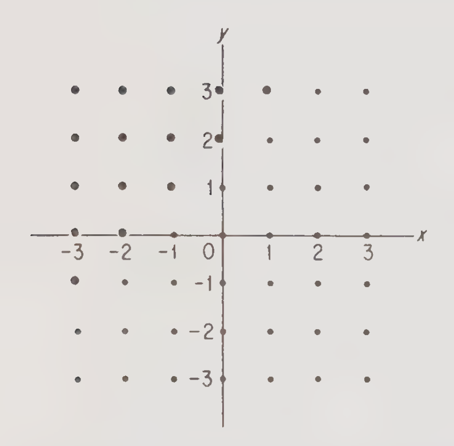
EJEMPLO 4: $\{(x, y) \mid y \geq x + 2\}$;
$U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Solución: El conjunto de los pares ordenados $U \times U$ está representado por un reticulado de 49 puntos. Antes de representar gráficamente la desigualdad dada es conveniente considerar primero la correspondiente proposición de igualdad, $y = x + 2$. El conjunto solución es

$$\{(x, y) \mid y = x + 2\} = \{(-3, -1), (-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3)\}.$$



La gráfica de $y \geq x + 2$ consta de todos los puntos que son soluciones de $y = x + 2$, así como de todos los puntos de $U \times U$ que están por encima de los puntos de la gráfica de $y = x + 2$.



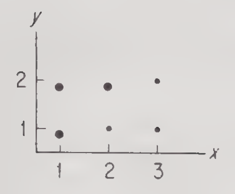
El reticulado de puntos no tiene que ser necesariamente un cuadrado perfecto. Así por ejemplo, consideremos los siguientes conjuntos de números:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{1, 2\}$$

Entonces $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

EJEMPLO 5: $\{(x, y) \mid y \geq x\}$; el conjunto sustitución para x es $\{1, 2, 3\}$ y el conjunto sustitución para y es $\{1, 2\}$.

Solución:



$$\{(x, y) \mid y \geq x\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}.$$

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 7-3

1. Considerando $U = \{1, 2\}$, hágase la lista de los elementos de $U \times U$.

2. Considerando $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, hágase la lista de los elementos de $A \times B$.

Determinar el conjunto solución para cada una de las siguientes proposiciones, considerando como conjunto de sustitución para x y para y los números naturales incluyendo el cero:

3. $x + y = 3$ **4.** $x + y = 5$

5. $x + y < 3$ **6.** $x + y \leq 4$

Hágase la lista de los elementos de cada conjunto solución para $U = \{1, 2, 3\}$:

7. $y = x + 1$ **8.** $x + y = 3$

9. $y < x$ **10.** $y \geq x$

Representar gráficamente cada conjunto solución, considerando $U = \{1, 2, 3, 4\}$:

11. $\{(x, y) \mid x + y = 5\}$

12. $\{(x, y) \mid y = x - 1\}$

13. $\{(x, y) \mid y \leq x - 1\}$

14. $\{(x, y) \mid y < x\}$

15. $\{(x, y) \mid y \geq x\}$

16. $\{(x, y) \mid y \geq x + 1\}$

Representar gráficamente cada conjunto solución, considerando $U = \{-3, -2, 1-, 0, 1, 2, 3\}$:

17. $\{(x, y) \mid y = x\}$

18. $\{(x, y) \mid y \leq x\}$

19. $\{(x, y) \mid x - y = 1\}$

20. $\{(x, y) \mid y - x = 2\}$

21. $\{(x, y) \mid y < x - 1\}$

22. $\{(x, y) \mid y \geq x\}$

23. $\{(x, y) \mid x + y = 7\}$

***24.** $\{(x, y) \mid y \geq |x|\}$

7-4 GRAFICAS SOBRE UN PLANO

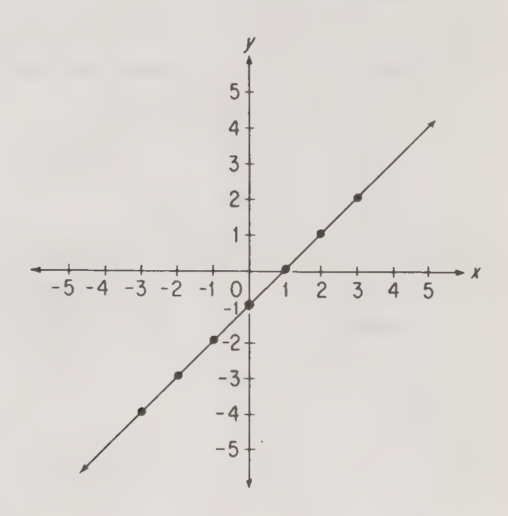
En la sección 7-3 se han utilizado sistemas coordenados finitos para hacer las gráficas de proposiciones lineales con dos variables. Ahora ampliamos U al conjunto de los números reales, siendo entonces $U \times U$ una colección infinita de pares ordenados de números. La gráfica de $U \times U$ consiste en todo el plano al cual se le ha dado, en honor a René Descartes, el nombre de **plano cartesiano.** Cada uno de los puntos del plano cartesiano puede representarse por un par ordenado de números reales (sus **coordenadas**), y cada par ordenado de números reales identifica (localiza) un punto único del plano. Es costumbre hacer referencia al punto de coordenadas (x, y) como el punto (x, y).

Considerando como universo el conjunto de los números reales, las proposiciones en una variable pueden ser representadas gráficamente sobre una recta; las proposiciones en dos variables pueden ser representadas gráficamente sobre un plano. Consideremos, por ejemplo, la proposición $y = x - 1$. Podemos determinar en una **tabla de valores** diversos pares ordenados de números que son soluciones de la proposición. Así, para $x = -1$, $y = -1 - 1 = -2$ y para $x = 3$, $y = 3 - 1 = 2$. Otros pares se dan en la tabla.

$y = x - 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2

Cada uno de los pares ordenados de números (x, y) que aparecen en la tabla pueden entonces representarse gráficamente y unirse entre sí. La gráfica de $y = x - 1$ es una recta que se extiende indefinidamente según se indica con las flechas, aunque dichas flechas no es costumbre señalarlas.



Cuando la gráfica de una proposición es una recta, la proposición recibe el nombre de **ecuación lineal** y puede expresarse en la forma

$$ax + by + c = 0,$$

no siendo a y b ambos cero. Así por ejemplo, la proposición $y = x - 1$ puede escribirse de la forma $x - y - 1 = 0$, siendo pues una ecuación lineal.

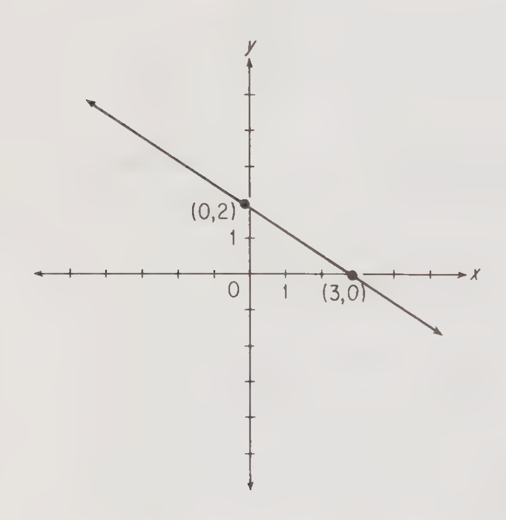
Dado que una recta queda determinada por dos puntos, se puede representar una ecuación lineal localizando sólo dos de sus puntos. (Es conveniente, sin embargo, localizar un tercer punto que permita verificar la gráfica). Cuando $a \neq 0$ y $b \neq 0$ los puntos que conviene localizar son aquellos en los que la gráfica corta a los ejes x y y. La gráfica de $y = x - 1$ corta al eje x cuando $y = 0$; es decir, en el punto A: $(1, 0)$, siendo 1 la **intersección con el eje** x de la gráfica. La gráfica de $y = x - 1$ interseca al eje y cuando $x = 0$; es decir, en el punto B: $(0, -1)$, siendo -1 la **intersección con el eje** y de la gráfica.

EJEMPLO 1: Determinar las intersecciones sobre los ejes x y y de la gráfica de $2x + 3y - 6 = 0$.

Solución: Para $y = 0$, se tiene $2x - 6 = 0$ y por lo tanto $x = 3$. La intersección con el eje x es 3 y la gráfica corta al eje x en el punto $(3, 0)$. Para $x = 0$, se tiene $3y - 6 = 0$ y por lo tanto $y = 2$. La intersección con el eje y es 2 y la gráfica corta al eje y en el punto $(0, 2)$.

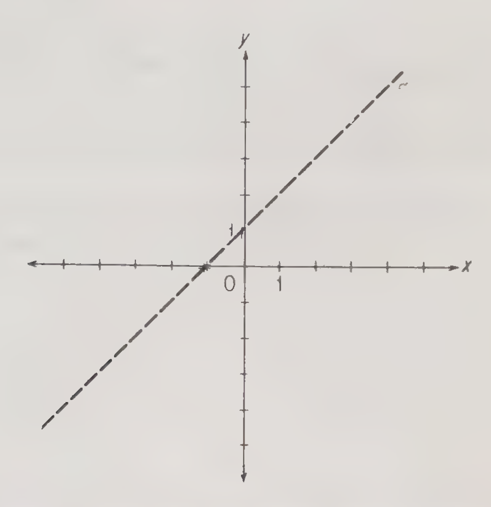
EJEMPLO 2: Representar $\{(x, y) \quad 2x + 3y - 6 = 0\}$.

Solución: Obsérvese que, al igual que en las proposiciones en una variable, cuando no se especifica un conjunto universal se considera que éste es el conjunto de los números reales. Utilizando los resultados obtenidos en el Ejemplo 1, se tiene la siguiente gráfica:

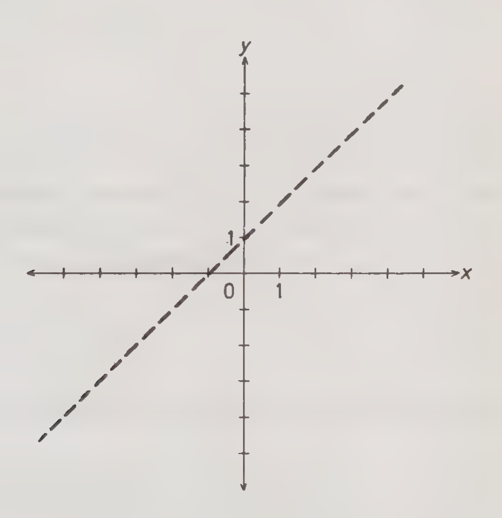


También pueden representarse gráficamente proposiciones de desigualdad para el universo de los números reales. Consideremos la proposición $y > x + 1$. Es conveniente dibujar primero la gráfica de la proposición de igualdad correspondiente $y = x + 1$. Di-

cha gráfica se hace por medio de una recta punteada, dado que sus puntos no forman parte de la gráfica de $y > x + 1$.



La recta $y = x + 1$ divide el plano en dos semiplanos. Dado que queremos determinar todos los valores de y *mayores que* $x + 1$, sombreamos el semiplano que está por *encima* de la recta y que representa el conjunto solución.



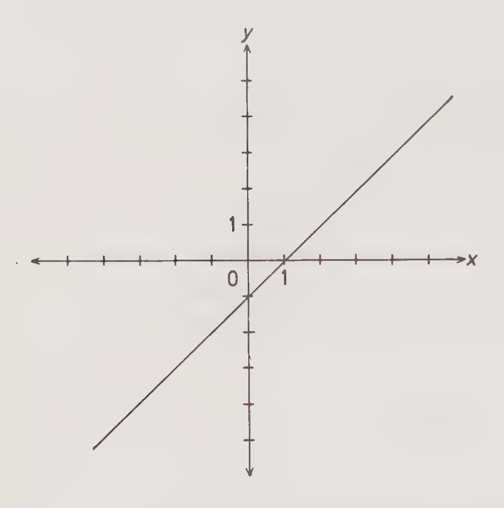
Si queremos la gráfica de $y \geq x + 1$ se tendría la misma figura con la salvedad de que la recta $y = x + 1$ aparecería con un trazo continuo. La proposición $y \geq x + 1$ puede considerarse como la proposición compuesta

$$y > x + 1 \quad \text{o} \quad y = x + 1.$$

siendo pues la unión del semiplano y la recta.

EJEMPLO 3: Representar gráficamente $y \leq x - 1$.

Solución: La gráfica de esta proposición consta de todos los puntos de la recta $y = x - 1$, así como de los puntos del semi-



plano *por debajo* de la recta, según se indica en la región sombreada de la gráfica Es decir, la proposición $y \leq x - 1$ puede considerarse como la proposición compuesta

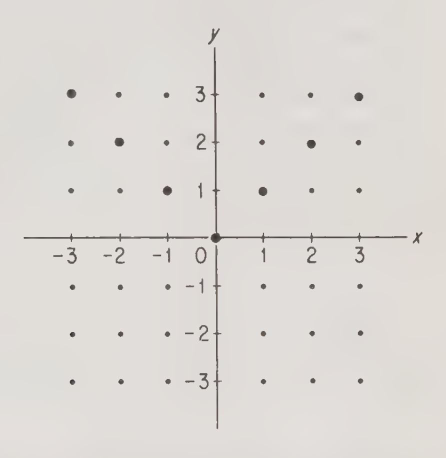
$$y < x - 1 \quad \text{o} \quad y = x - 1.$$

No todas las proposiciones en dos variables tienen gráficas que son rectas. Esto es exclusivo de las proposiciones que pueden escribirse en la forma $ax + by + c = 0$. En la sección 7-2 consideramos gráficas de proposiciones en una variable en las que intervenía el valor absoluto. Analicemos ahora proposiciones con dos variables en las que intervengan el valor absoluto, tales como $y = |x|$. A fin

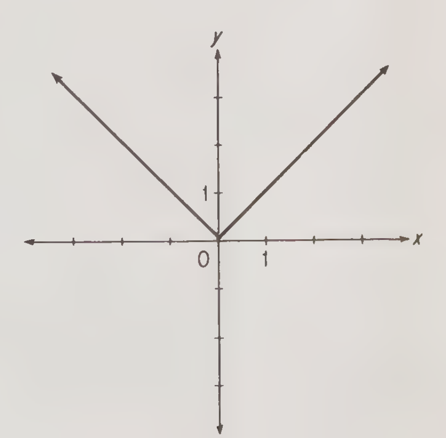
de facilitarnos el representar esta proposición para el universo de los números reales, consideremos primero la gráfica para $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Los valores a representar sc indican en la siguiente tabla de valores.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

Estos pares ordenados (x, y) tales que $y = |x|$ pueden ser representados sobre $U \times U$ como sigue:

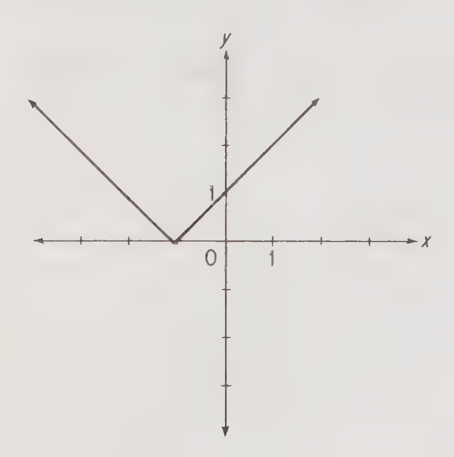


Si U es el conjunto de los números reales, la gráfica consta de una infinidad de puntos. Utilizando la gráfica anterior como guía estamos ahora en condiciones de graficar $y = |x|$ para el conjunto de los números reales, como sigue:



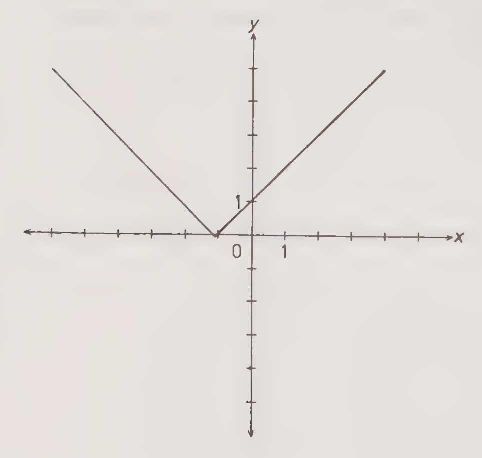
EJEMPLO 4: Representar gráficamente $\{(x, y) \mid y = |x + 1|\}$.

Solución: Recuérdese que se considera como universo el conjunto de los números reales a menos que se especifique otro.



Obsérvese que si $x = -1$, entonces $y = 0$; si $x = 0$ o -2, entonces $y = 1$; si $x = 1$ o -3, entonces $y = 2$ y así sucesivamente.

EJEMPLO 5: Representar gráficamente $\{(x, y) \mid y \geq |x + 1|\}$.



Solución: Del ejemplo 4 conocemos la gráfica de $y = |x + 1|$. La gráfica de $y \geq |x + 1|$ se completa sombreando la porción de plano como se indica en la gráfica.

ƧƧ

En resumen, cualquier proposición en dos variables puede considerarse como **generador de un conjunto.** El conjunto de pares ordenados a que da lugar es un *subconjunto* de $U \times U$. Si U es el conjunto de los números reales, el conjunto solución corresponde al conjunto de los puntos que satisfacen una condición dada en un plano coordenado. Así, a la gráfica de una ecuación o desigualdad se le da el nombre de lugar geométrico de la ecuación o desigualdad, es decir, el lugar geométrico es el conjunto de puntos que corresponden al conjunto solución. Por ello es costumbre hablar de representación gráfica de proposiciones, lo que realmente significa representación gráfica del conjunto solución de la proposición.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 7-4

Para la gráfica de cada una de las siguientes proposiciones determinar las intersecciones con los ejes x y y.

1. $x + y = 4$
2. $x - y = 4$
3. $y = 2x + 4$
4. $y = x - 2$
5. $2x + 3y = 12$
6. $3x - 2y = 6$
7. $x + 2y - 4 = 0$
8. $2x - y + 6 = 0$

Copiar y completar las siguientes tablas de valores para las ecuaciones dadas:

9. $y = x + 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

10. $y = x - 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

11. $y = -x + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

12. $y = 2x + 5$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Representar gráficamente cada conjunto solución para el universo de los números reales:

13. $y = x - 2$
14. $y = x + 2$
15. $x + y = 4$
16. $x - y = 4$
17. $x + y - 5 = 0$
18. $x - y + 5 = 0$
19. $2x + y - 4 = 0$
20. $x - 2y + 4 = 0$
21. $y \geq x$
22. $y \leq x - 2$
23. $y \leq x + 2$
24. $y \geq x + 3$
25. $\{(x, y) \mid y = |x - 1|\}$
26. $\{(x, y) \mid y = |x + 2|\}$
27. $\{(x, y) \mid y \leq |x|\}$
28. $\{(x, y) \mid y > |x|\}$
29. $\{(x, y) \mid y \geq |x| + 1\}$
30. $\{(x, y) \mid y \leq |x| - 2\}$
31. $\{(x, y) \mid y = 2\}$
32. $\{(x, y) \mid x = -3\}$

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 7-4

Representar gráficamente las siguientes proposiciones siendo $U = \{1, 2, 3, 4\}$:

1. $\{(x, y) \mid y = x^2\}$
2. $\{(x, y) \mid y > x^2\}$
3. $\{(x, y) \mid y < (x + 1)^2\}$
4. $\{(x, y) \mid y < x^3 - 1\}$

Representar gráficamente las siguientes proposiciones siendo U el conjunto de los números reales:

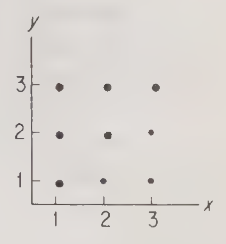
5. $\{(x, y) \mid y = x^2\}$
6. $\{(x, y) \mid y = x^2 + 2\}$
7. $\{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$
8. $\{(x, y) \mid y \geq x^2\}$
9. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$
10. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$

*11. $\{(x, y) \mid y > x^2 \text{ y } x \geq 0\}$

*12. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9 \text{ y } y \geq 0\}$

7-5 RELACIONES Y FUNCIONES

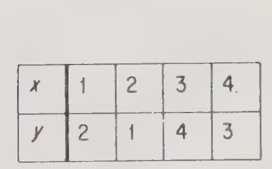
Una **relación** puede definirse como un subconjunto cualquiera de $U \times U$; por consiguiente, una relación es un conjunto de pares ordenados de números. Lo más usual es definirla como una regla. Consideremos, por ejemplo, $\{(x, y) \mid y > x - 1\}$, siendo $U = \{1, 2, 3\}$. El conjunto solución, que *es* la relación, es $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$. La gráfica puede hacerse como se ve en la figura adjunta.



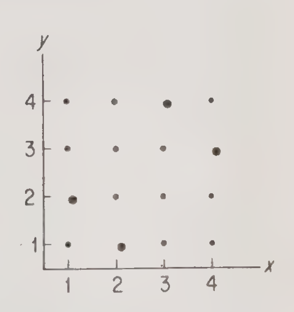
La relación puede definirse mediante la regla, por medio de la gráfica o por una tabla de valores para la variable:

x	1	1	1	2	2	3
y	1	2	3	2	3	3

He aquí la tabla y la gráfica para otra relación:



x	1	2	3	4.
y	2	1	4	3



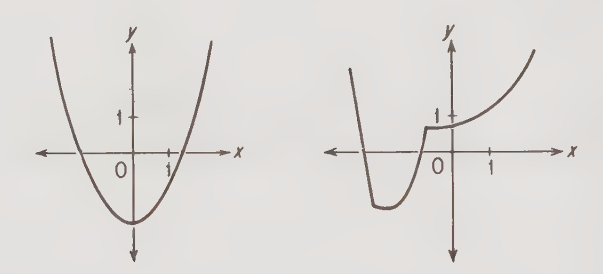
Esta relación es el conjunto de pares ordenados $\{(1, 2,), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$.

Obsérvese que la segunda relación difiere de la primera en que,

para cualquier valor de x, existe a lo sumo un valor para y. A dicho tipo particular de relación se le da el nombre de *función*.

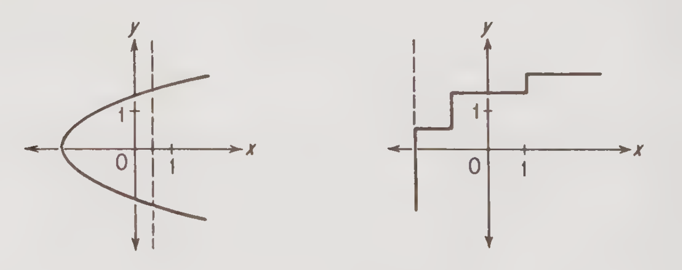
Una **función** es un conjunto de pares ordenados (x, y) tal que para cada valor de x hay a lo sumo un valor de y; es decir, ningún primer elemento se asocia con más de un segundo elemento. Se puede considerar al primer elemento como la **variable independiente** y al segundo elemento como la **variable dependiente.** Cada variable tiene un conjunto de posibles valores. El conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados de números recibe el nombre de **dominio** de la función; el conjunto de todos los segundos elementos se llama **recorrido** de la función. En términos de sus gráficas, cualquier recta vertical corta a la gráfica de una función a lo sumo en un punto.

A continuación se muestran las gráficas de dos relaciones que son funciones:



Obsérvese que ninguna recta vertical corta a la gráfica en más de un punto.

He aquí las gráficas de dos relaciones que no son funciones:



Obsérvese que en cada uno de los casos existe por lo menos una recta vertical que corta a la gráfica en dos o más puntos.

Si bien fórmulas tales como $y = x^2$ pueden *definir* una función, no son exactamente funciones. Se ha definido la función como

un conjunto de pares ordenados (x, y) que se obtienen de la fórmula $y = x^2$ para la variable real x. Así, una fórmula puede proporcionar una regla por medio de la cual puede determinarse la función. Dicho de otra forma, una fórmula puede proporcionar el medio para asociar un único elemento de recorrido con cada elemento del dominio.

Cuando se utiliza una fórmula tal como $y = x^2 - 2x + 3$ para definir una función, es costumbre considerar a y como *función de* x y escribir la fórmula en la **notación de función:**

$$y = f(x)$$

siendo

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

Entonces el valor de y para cualquier valor b de x puede expresarse en la forma $f(b)$. Por ejemplo.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 2(2) + 3 = 3; \\ f(-1) &= (-1)^2 - 2(-1) + 3 = 6; \\ f(0) &= 0^2 - 2(0) + 3 = 3; \\ f(1) &= 1^2 - 2(1) + 3 = 2. \end{aligned}$$

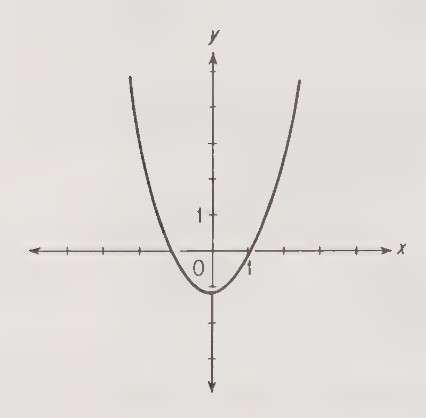
Obsérvese que para la función $f(x) = (x - 1)^2 + 2$, el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales y el recorrido de la función es el conjunto de los números reales mayores o iguales a 2. El recorrido puede determinarse a partir de la gráfica de la función u observando que dado que $(x - 1)^2 \geq 0$ se tiene que $(x - 1)^2 + 2 \geq 2$.

Al representar funciones se pueden emplear notaciones tales como $g(x)$ y $h(y)$.

EJEMPLO 1: Representar gráficamente la función $y = x^2 - 1$ e identificar el dominio y el recorrido de dicha función.

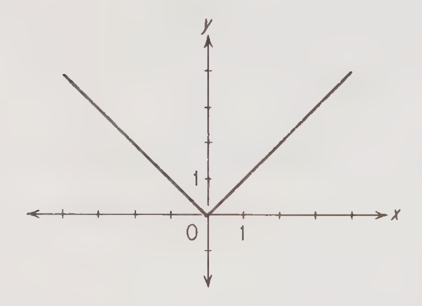
Solución: La variable x puede tomar como valor cualquier número real. Por consiguiente el dominio es el conjunto de los

números reales. El recorrido es el conjunto de los números reales mayores o iguales a -1; es decir, como se ve en la gráfica, $y \geq -1$.



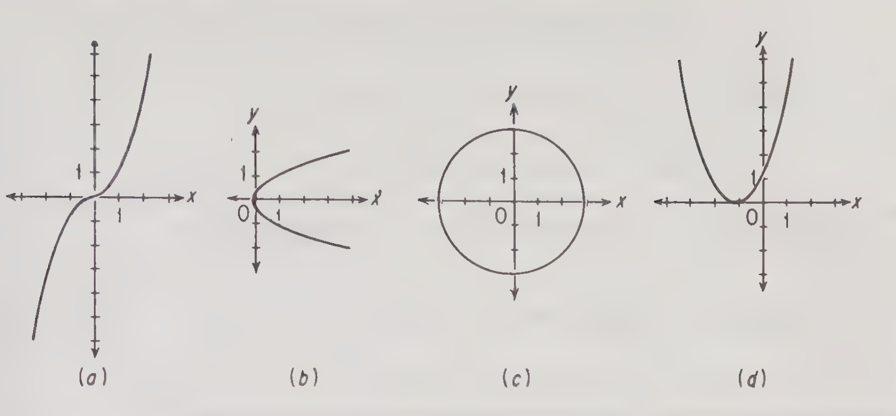
EJEMPLO 2: Determinar el dominio y el recorrido de $y = |x|$.

Solución: Dominio: conjunto de los números reales. Recorrido: conjunto de los números reales no negativos; es decir, $y \geq 0$.



EJEMPLO 3: De las siguientes fórmulas decir cuáles definen funciones: (a) $y = x^3$; (b) $x = y^2$; (c) $x^2 + y^2 = 9$; (d) $y = (x + 1)^2$.

Solución: A partir de las gráficas se observa que las fórmulas (a) y (d) definen funciones.



Dada cualquier relación, la **relación inversa** es el conjunto de pares ordenados que se obtiene intercambiando los elementos de cada uno de los pares ordenados de la relación dada. Así, supongamos la relación dada:

$$R = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 5)\}.$$

La relación inversa de R consiste entonces en el siguiente conjunto de pares ordenados:

$$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4)\}.$$

Teniendo en cuenta que una función no es más que un tipo particular de relación, la inversa de una función se puede determinar en forma análoga. Es decir, la inversa de una función se obtiene intercambiando los elementos de cada uno de los pares ordenados de números que comprenden la función. Será función si y sólo si para cada y de la función original se tiene a lo sumo un x.

EJEMPLO 4: Determinar la inversa de la función

$$F = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}.$$

Solución: La inversa de dicha función es otra función, F', siendo ésta:

$$F' = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}.$$

EJEMPLO 5: Determinar la inversa de la función

$$A = \{(1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 7)\}.$$

Solución: La inversa, A', de la función es una relación pero no es función.

$$A' = \{(3, 1), (4, 2), (4, 3), (7, 4)\}$$

Si una relación está dada mediante una fórmula, entonces se puede obtener una fórmula para su inversa intercambiando las variables.

EJEMPLO 6: Determinar una fórmula para la inversa de la función

$$F = \{(x, y) \mid y = 2x\}.$$

Solución: La inversa de F es $F' = \{(x, y) \mid x = 2y\}$. También se puede expresar como $F' = \left\{(x, y) \mid y = \frac{x}{2}\right\}$. En este caso, la inversa de la función dada es también función.

EJEMPLO 7: Determinar la inversa de $F = \{(x, y) \mid y = x^2\}$.

Solución: $\{(x, y) \mid x = y^2\}$. También puede expresarse la solución como $\{(x, y) \mid y = \pm\sqrt{x}\}$. Obsérvese que la inversa de la función dada es una relación pero no es función. Explíquese por qué.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 7-5

1. Si $f(x) = x - 2$, determinar **(a)** $f(1)$; **(b)** $f(2)$; **(c)** $f(17)$.

2. Si $f(x) = x^2 - 4x + 5$, determinar **(a)** $f(0)$; **(b)** $f(2)$; **(c)** $f(-3)$.

3. Si $g(x) = x^3 - 7$, determinar **(a)** $g(2)$; **(b)** $g(-1)$; **(c)** $g(-2)$.

4. Si $f(x) = |x| + x$, determinar **(a)** $f(-2)$; **(b)** $f(0)$; **(c)** $f(3)$.

Representar gráficamente cada una de las siguientes relaciones; identificar las relaciones que son funciones y en cada una de éstas establecer el dominio y el recorrido. Para cada caso $U = \{1, 2, 3\}$.

5. $y = x$ **6.** $y = x + 1$

7. $y < x$ **8.** $y < x + 1$

Proceder como en los Ejercicios del 5 al 8 considerando como universo el conjunto de los números reales:

9. $y = x + 1$ **10.** $y = x - 1$

11. $y = |x - 1|$ **12.** $y = |x + 1|$

13. $y = |x| + 1$ **14.** $y = |x| - 1$

15. $y \geq x$ **16.** $y \leq x - 1$

***17.** $y = -x^2$ ***18.** $y = (x + 1)^2$

Determinar la inversa de cada una de las siguientes funciones. Dígase si la inversa es a su vez función.

19. $F = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ **20.** $F = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

21. $F = \{(1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ **22.** $F = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$

23. $F = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$ **24.** $F = \{(x, y) \mid y = x - 2\}$

Hágase la gráfica de cada una de las siguientes funciones por medio de una línea punteada y la gráfica de su inversa mediante una línea continua. Dígase si la inversa de cada función es a su vez función.

25. $y = x + 2$ **26.** $y = x - 2$

27. $y = x$

28. $y = 2x$

*29. $y = x^2$

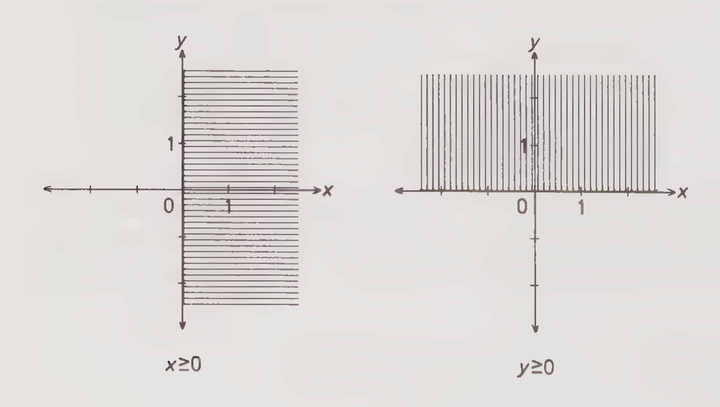
*30. $y = |x|$

7-6 PROGRAMACION LINEAL

Las gráficas de las proposiciones lineales en dos variables proporcionan un instrumento muy valioso para la solución de problemas modernos. Si bien los matemáticos están desarrollando teorías para proposiciones que no son necesariamente lineales, aquí nos limitaremos a considerar el caso lineal. Así pues, consideraremos que las condiciones del problema se han representado, o bien se han supuesto aproximadas, mediante proposiciones lineales. Entonces, la solución del problema depende de la solución de un sistema (es decir, un conjunto) de proposiciones lineales. El método usual de solución es mediante una representación gráfica; es decir, el método es geométrico. Por ello, consideraremos primero dos ejemplos de gráficas de sistemas de proposiciones lineales en dos variables reales.

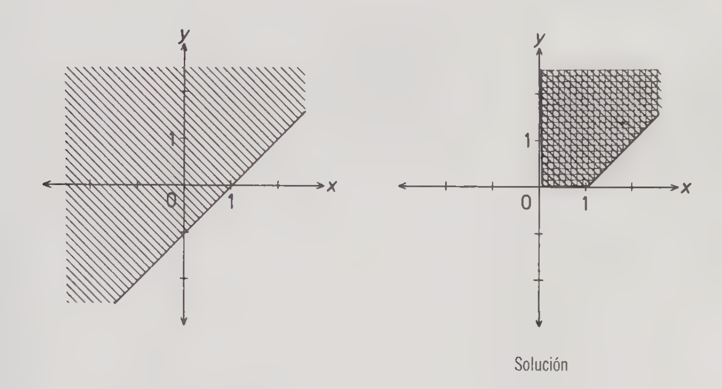
EJEMPLO 1: Hacer la gráfica del sistema $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \geq x - 1$.

Solución: El conjunto solución del sistema dado consta de los pares ordenados de números reales (x, y) que satisfacen las



$x \geq 0$ $y \geq 0$

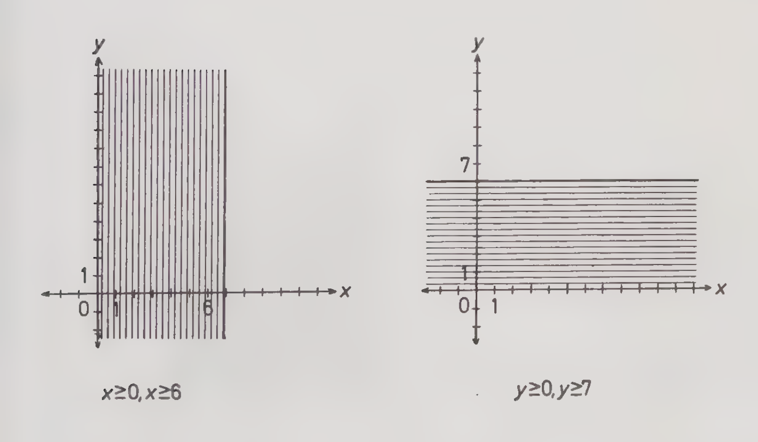
tres proposiciones. Para hacer la gráfica del sistema se hace la gráfica de cada una de las tres proposiciones y se toma la intersección de ellas.

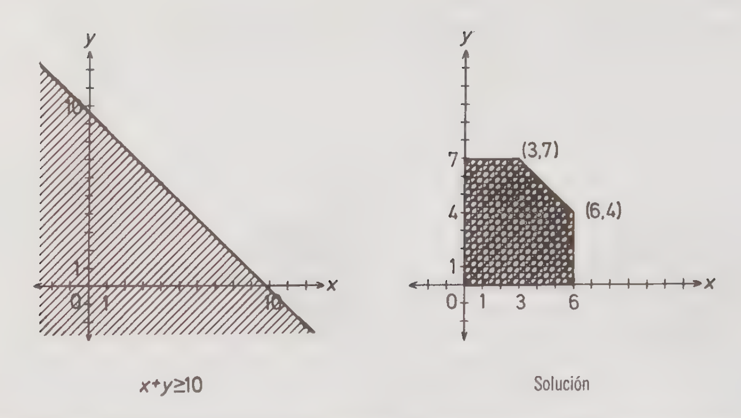


Como se hizo en §7-4, una desigualdad se representa gráficamente obteniendo primero la representación gráfica de la igualdad (considerando una recta continua si su gráfica es parte del conjunto solución y punteada en caso contrario).

EJEMPLO 2: Hacer la gráfica del sistema

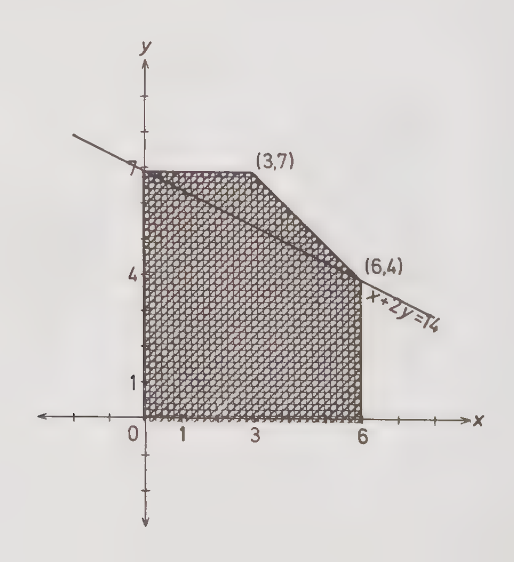
$$x \geq 0; y \geq 0; x \leq 6; y \leq 7; x + y \leq 10.$$





En los Ejemplos 1 y 2, las soluciones de los sistemas de proposiciones reciben el nombre de **conjuntos convexos poligonales.**

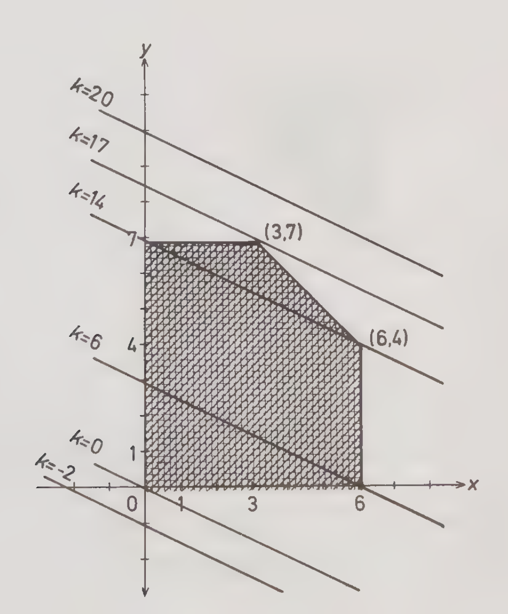
En un problema de programación lineal no sólo es necesario establecer las condiciones sino también se requiere maximizar o minimizar una expresión representativa de un beneficio, de un costo o de otra cantidad. Supongamos que las condiciones del Ejemplo 2 representan la manufactura de x cajas de metal y de y jarras de vidrio en un tiempo dado y que $x + 2y$ representa el beneficio del fabricante. Si el fabricante desea obtener un beneficio de $14, se grafica entonces la ecuación $x + 2y = 14$ bajo las condiciones del Ejemplo 2.



Obsérvese que hay muchas formas de que el fabricante obtenga un beneficio de \$14. En particular, considérense los puntos (0, 7) y (6, 4). Se ve que puede ganar \$14 fabricando 0 cajas de metal y 7 jarras de vidrio, o 6 cajas de metal y 4 jarras de vidrio. Es más, cualquier punto de la recta $x + 2y = 14$ que esté comprendido en la región poligonal representa un par ordenado (x, y) que, bajo las restricciones enunciadas, determina un beneficio de \$14.

Consideremos ahora el mismo ejemplo, pero siendo k el beneficio. Para cada valor k la gráfica de $x + 2y = k$ es una recta. Al tomar k diferentes valores, se obtiene un conjunto de rectas paralelas. Cuando varias de esas rectas se representan gráficamente junto con la solución de las condiciones del Ejemplo 2, se ve que bajo estas condiciones k puede tomar cualquier valor comprendido entre 0 y 17 ambos inclusive. El valor máximo (el más grande) que es posible para k bajo dichas condiciones es 17 y se presenta en el punto (3, 7). El valor mínimo (el más pequeño) posible para k es 0 y se presenta en el punto (0, 0). Recordemos que las condiciones son para la manufactura de x cajas de metal y y jarras de vidrio, en un tiempo dado y que $x + 2y$ representa el beneficio que se obtiene de la venta. Entonces si consideramos que el fabricante puede vender todas las piezas que fabrique, obtendrá el beneficio máximo al fabricar 3 cajas y 7 jarras por unidad de tiempo.

En cualquier problema de programación lineal el valor máximo o mínimo se presenta siempre en un vértice (o posiblemente

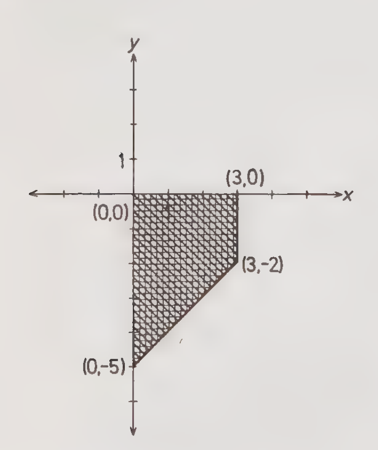


también en dos vértices; es decir, a lo largo de un lado) de la región poligonal. Se intuye que la razón de ello se debe a que la región es convexa y por lo tanto las rectas de un conjunto de rectas paralelas cortan por primera vez la región ya sea pasando por un vértice, como es el caso del ejemplo, o pasando por un lado de la región. En consecuencia, en el ejemplo se podría haber determinado el valor máximo de $x + 2y$ para puntos de la región verificando los valores correspondientes a los vértices (0, 0), (6, 0), (6, 4), (3, 7) y (0, 7) de la región. Los valores correspondientes a $x + 2y$ son 0, 6, 14, 17 y 14, respectivamente. Por consiguiente, como ya se había determinado antes, el valor mínimo de $x + 2y$ es 0 y se presenta en el punto (0, 0) y el valor máximo es 17 y se presenta en el punto (3, 7).

EJEMPLO 3: Hacer la gráfica del sistema

$$x \geq 0;\ x \leq 3;\ y \leq 0;\ x - y \leq 5.$$

Solución:



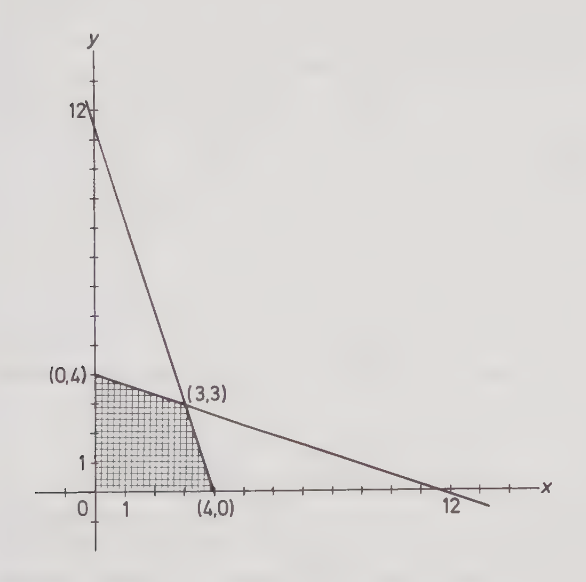
EJEMPLO 4: Determinar los valores máximo y mínimo de la función $2x + y$ definida sobre el sistema del Ejemplo 3.

Solución: Sea la función F. Entonces en (0, 0), $F = 0$; en (0, —5), $F = -5$; en (3, 0), $F = 6$; en (3, —2), $F = 4$. Por

consiguiente, en (0, —5) se tiene el valor mínimo —5; en (3, 0) se tiene el valor máximo 6.

EJEMPLO 5: Un fabricante produce dos tipos de artículos y operando sus máquinas durante las 24 horas del día. Para producir un artículo M se requieren dos horas de trabajo de una máquina A y 6 horas de trabajo de una máquina B. Para producir un artículo N se requieren 6 horas de trabajo en la máquina A y 2 horas en la máquina B. El fabricante desea un beneficio de \$5 por cada artículo M y \$2 por cada artículo N. Determinar el número de artículos de cada tipo que tendrá que producir por día a fin de obtener el beneficio máximo.

Solución: Siendo x el número de artículos M y y el número de artículos N que deben producirse, las condiciones del problema pueden establecerse gráficamente como sigue:



$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$2x + 6y \leq 24$$
$$6x + 2y \leq 24$$
$$\text{Beneficio} = P = 5x + 2y$$

Se calcula el valor numérico de la ecuación del beneficio,

$5x + 2y$, en los vértices del polígono. En $(0, 0)$, $P = 0$; en $(0, 4)$, $P = 8$; en $(3, 3)$, $P = 21$; y en $(4, 0)$, $P = 20$. Por consiguiente, para lograr un beneficio máximo, el fabricante tendrá que producir 3 artículos de cada clase.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 7-6

Hacer la gráfica de cada uno de los siguientes sistemas:

1. $x \geq 2$; $x \leq 4$; $y \geq 0$; $x + y \leq 5$.

2. $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + 3y \leq 9$; $2x + y \leq 8$.

Determinar los valores de x y y de tal modo que, bajo el conjunto de condiciones del ejercicio que se especifica, la expresión dada tenga: (a) *un valor máximo;* (b) *un valor mínimo.*

3. $x + 2y$; Ejercicio 1.

4. $3x + y$; Ejercicio 1.

5. $x + y$; Ejercicio 2.

6. $x + 5y$; Ejercicio 2.

Alicando programación lineal, resolver los siguientes problemas hipotéticos:

7. Una escuela está experimentando una combinación de métodos de enseñanza, utilizando a la vez, en las clases, profesores y un circuito cerrado de televisión. La escuela tiene la posibilidad de manejar cinco secciones de una clase utilizando al mismo tiempo el circuito cerrado de televisión. Para las cinco secciones de una clase que requiere tres horas a la semana las condiciones son las siguientes: el costo por minuto de enseñanza clásica es de $5.00, el costo por minuto del circuito cerrado de televisión es de $3.00. Se disponen a lo sumo de $750.00 semanales para el pago de la enseñanza de dichas clases. Se considera que la hora de clase puede ser en parte con un maestro y en parte con el circuito cerrado de televisión. Cuando no se utilizan ni el uno ni el otro los estudiantes

están en libertad de discutir lo que quieran. Si el valor para los estudiantes de x minutos de enseñanza con maestro y y minutos con circuito cerrado de televisión está dado por la expresión $3x + 2y$, determinar cuántos minutos de enseñanza con maestro y cuántos minutos de circuito cerrado de televisión resultan convenientes para los estudiantes durante la semana.

8. Repetir el Ejercicio 7 con la condición adicional de que el maestro debe estar presente al menos 30 minutos a la semana.

9. Considerando las condiciones como en el Ejercicio 8, determinar el número de minutos de enseñanza con maestro y de circuito cerrado de televisión si el valor para los estudiantes está dado por la expresión $x + 2y$.

10. Repetir el Ejercicio 9 si el valor para los estudiantes está dado por la expresión $2x + y$.

EXAMEN RELATIVO AL CAPITULO 7

1. Dígase en cada caso si la gráfica del conjunto solución es un punto, una semirrecta, un segmento, una recta o el conjunto vacío.

(a) $x + 2 > 5$ **(b)** $x + 3 > x$
(c) $-2 \leq x \leq 1$ **(d)** $x - 3 \leq 5$

Hacer la gráfica del conjunto solución para valores reales de x:

2. **(a)** $x - 2 \geq 1$ **(b)** $-2 < x \leq 3$

3. **(a)** $x \leq 1$ y $x \geq -2$ **(b)** $x \leq -2$ o $x > 1$

4. **(a)** $|x| = 4$ **(b)** $|x| \leq 1$

5. Hacer la gráfica de cada conjunto solución para $U = \{1, 2, 3\}$:

(a) $\{(x, y) \mid y = x + 1\}$ **(b)** $\{(x, y) \mid y > x\}$

Hacer la gráfica de cada conjunto solución para el universo de los números reales:

6. **(a)** $y = x - 3$ **(b)** $x + y = 1$

7. (**a**) $y \geq x - 2$ (**b**) $y < |x|$

8. Si $f(x) = x^2 + 2x - 3$, determinar (**a**) $f(-2)$; (**b**) $f(1)$.

9. Determinar la inversa de cada una de las funciones. Decir si la inversa es una función.

(**a**) $F = \{(1, 3), (2, 5), (3, 5)\}$
(**b**) $F = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2)\}$

10. Hacer la gráfica de cada función y decir cuál es su dominio y su recorrido:

(**a**) $y = x - 1$ (**b**) $y = |x - 1|$

Capítulo 8

UNA INTRODUCCION A LA PROBABILIDAD

En el lenguaje cotidiano es frecuente hacer referencia a la probabilidad. Se dice, por ejemplo, "probablemente llueva", "las probabilidades de ganar están a su favor" y se hacen otros comentarios análogos acerca de diversas cuestiones.

La investigación matemática sobre cuestiones de probabilidad se remonta al siglo quince. Lo curioso es que, según se dice, el tema tuvo su origen en el dominio del juego al suscitarse una discusión acerca de las condiciones en que se debía considerar equitativo apostar, en un determinado momento del desarrollo de un juego no terminado, de acuerdo con la probabilidad de ganar de cada uno de los jugadores en dicho momento. Hoy en día la probabilidad se sigue aplicando en los juegos de azar tales como el juego de cara o cruz con las monedas, el juego de dados o el sor-

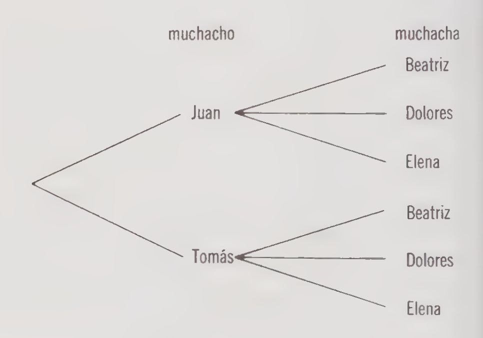
teo de loterías. La probabilidad también se aplica en problemas relativos a los costos de seguros de vida (basados en tablas de mortandad), en encuestas de la opinión pública y en gran número de estudios estadísticos. Los temas que se abordan en este capítulo proporcionan una base para comprender la probabilidad y sus aplicaciones en la vida real.

8-1 PROBLEMAS DE COMPUTO

La solución de muchos problemas depende de la enumeración de todas las posibilidades de un suceso. Por ello, el simple hecho de contar es una parte importante en el estudio de la probabilidad. A fin de ilustrarlo por medio de varios problemas en este capítulo, supondremos la existencia de un club que consta del siguiente conjunto M de miembros:

$$M = \{\text{Beatriz, Dolores, Elena, Juan y Tomás}\}$$

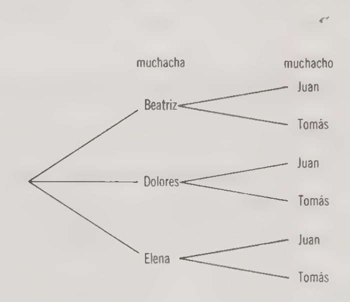
Formemos ahora un comité que conste de un muchacho y una muchacha elegidos entre los miembros del club. ¿Cuántos comités pueden formarse? Un modo de contestar la pregunta es mediante un diagrama que nos permita ver cada una de las posibilidades.



Para cada una de las dos posibilidades de elección de un muchacho, hay tres posibles elecciones de una muchacha. Por consiguiente, como se puede ver en el diagrama, se pueden formar seis comités:

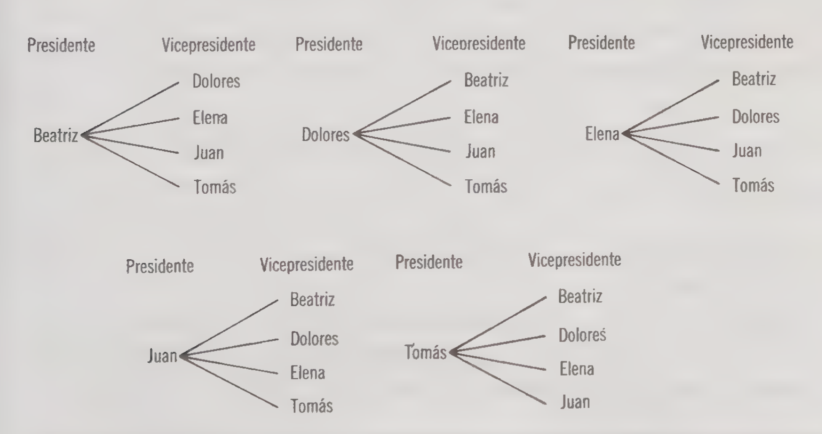
Juan—Beatriz	Tomás—Beatriz
Juan—Dolores	Tomás—Dolores,
Juan—Elena	Tomás—Elena

Supongamos que en principio hubiésemos elegido a la muchacha. El **diagrama** tomaría entonces la forma que a continuación se muestra, obteniéndose el mismo resultado, los mismos seis comités que en el caso anterior.



EJEMPLO 1: ¿De cuántas formas diferentes pueden elegirse del conjunto M un presidente y un vicepresidente?

Solución: Existen cinco posibles elecciones para el puesto de presidente. Cada una de ellas puede asociarse con uno cualquiera de los cuatro miembros restantes. Por consiguiente, existen en total 20 posibles formas diferentes, tal como se puede ver en el siguiente diagrama.



En general, si un suceso puede efectuarse de m formas diferentes y un segundo suceso puede efectuarse de n modos diferentes, entonces los dos sucesos juntos se pueden efectuar de $m \times n$ formas diferentes. Si se presenta un mayor número de sucesos el principio se generaliza:

$$m \times n \times r \times \cdots \times t$$

EJEMPLO 2: Se tiene que mandar un delegado del club M a dos reuniones que se efectúan en fechas diferentes. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar los delegados si cada miembro del club puede ser elegido?

Solución: Existen cinco posibles elecciones de un delegado a la primera reunión. Dado que no se ha hecho ninguna restricción, suponemos que el mismo miembro puede delegarse a las dos reuniones. Por consiguiente, por cada una de las cinco posibilidades de la primera reunión hay cinco posibilidades para la segunda. Así pues, en total, existen 5×5, es decir, 25 posibilidades. Este resultado se puede hacer ver en un diagrama.

EJEMPLO 3: ¿Cuántas ternas pueden formarse con el conjunto de las vocales, $v = \{a, e, i, o, u\}$, si en cada terna no puede repetirse ninguna letra? (Cada terna es un conjunto de tres letras, como por ejemplo aeo, iou, etc.) .

Solución: Hay cinco elecciones posibles para la primera letra, cuatro para la segunda y tres para la tercera. En total hay $5 \times 4 \times 3$, es decir, 60 posibles ternas. Obsérvese que si se pudiesen repetir las letras, entonces serían posibles 125 ternas.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 8-1

1. ¿Cuántas ternas se pueden formar con el conjunto de las vocales $V = \{a, e, i, o, u\}$ si: **(a)** no se puede repetir ninguna letra? **(b)** si la repetición de letras es permitida?

2. Repítase el Ejercicio 1 para conjuntos de cuatro letras.

3. Un hombre tiene cuatro americanas y tres pares de pantalones. Considerando que puede combinar todas esas prendas ¿de cuántas formas diferentes puede vestirse?

4. Una persona tiene 5 trajes, 3 sombreros y 4 pares de zapatos. Suponiendo que puede combinar esas prendas en cualquier forma ¿de cuántas formas diferentes puede vestirse?

5. Un equipo de béisbol tiene seis lanzadores y cuatro receptores ¿Cuántas parejas pueden formarse con un lanzador y un receptor?

6. Mostrar por medio de un diagrama las diferentes rutas que se pueden seguir a Nueva York a Los Angeles pasando por Chicago, si de Nueva York a Chicago se puede ir por tren o por avión, y de Chicago a Los Angeles por tren, por avión o por autobús.

7. ¿Cuántos números diferentes de dos dígitos pueden formar se del conjunto de dígitos $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ si está permitida la repetición de dígitos? ¿Cuántos números de dos dígitos diferentes pueden formarse con el conjunto D?

8. Repetir el Ejercicio 7 para $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

9. Un club consta de 12 miembros. ¿Cuántos conjuntos diferentes se pueden formar al elegir la directiva que está compuesta de un presidente, un secretario y un tesorero? Nadie puede ocupar más de uno de los tres puestos.

10. Un club consta de 250 miembros de los cuales 200 pueden ser elegidos para ocupar algún puesto. Repítase el Ejercicio 9 para este club.

11. ¿Cuántos números de teléfono de cinco dígitos se pueden formar con los diez dígitos, considerando que el cero no puede utilizarse como primera cifra?

12. ¿Cuántos números pares de dos dígitos pueden formarse con el conjunto $I = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$?

13. Determinar el número de ternas que pueden formarse con el conjunto $V = \{a, e, i, o, u\}$, si:

(a) la primera letra debe ser i;
(b) la primera letra debe ser e y la última i.

14. ¿Cuántas matrículas pueden formarse utilizando una letra

del alfabeto seguida de tres dígitos, de los cuales el primero no puede ser cero? ¿Cuántas se pueden formar si el primer dígito no puede ser cero y no puede repetirse ningún dígito?

***15.** Determinar cuántos números de tres dígitos pueden formarse con el conjunto $w = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ si: no se puede utilizar el cero como primer dígito y:

(a) el número debe ser par;
(b) el número debe ser divisible por 5;
(c) ningún dígito puede repetirse;
(d) el número debe ser impar y menor que 500.

***16.** En una cerradura de "combinación" hay 50 posiciones diferentes. Para abrir la cerradura primero se gira en una dirección hasta cierto número, después hasta otro número girando en dirección opuesta y finalmente se gira en la dirección original hasta un tercer número. ¿Cuál es el número total de "combinaciones" posibles:

(a) si el primer giro tiene que ser en sentido de las manecillas del reloj?
(b) si el primer giro puede ser en un sentido o en otro?

***17.** Determinar el número de posibles matrículas diferentes si cada una consta de dos letras del alfabeto seguidas de tres dígitos decimales; el primer dígito no puede ser cero y no pueden repetirse ni letras ni números.

***18.** Repetir el Ejercicio 17 para matrículas que consten de tres consonantes seguidas de tres dígitos decimales.

8-2 PERMUTACIONES

Consideremos nuevamente el conjunto M de los miembros del club descrito en la sección anterior y la elección de los dos directivos estudiada en el Ejemplo 1. Se había determinado que había 20 conjuntos de directivas posibles. Se podía haber llegado al mismo resultado considerando que existen cinco elecciones posibles para el puesto de presidente, cada una de las cuales puede asociarse con cada una de las cuatro posibles elecciones para vice-presidente.
Se dice que existen 5×4, es decir, 20 *permutaciones* del conjunto M tomando los elementos de dos en dos. En cada uno de los 20 casos, la primera persona considerada debe ocupar el puesto de

presidente y la segunda ocupará el puesto de vicepresidente; por consiguiente, tiene importancia el *orden* en que se consideran las personas. Una **permutación** de un conjunto de elementos es un ordenamiento específico de algunos elementos del conjunto. En el problema que se ha considerado, la permutación de cinco elementos tomados de dos en dos es 20. Se representa simbólicamente por:

$$_5P_2 = 20.$$

($_5P_2$ se lee: "La permutación de 5 elementos tomados de dos en dos").

En general, es necesario determinar una fórmula para $_nP_r$ es decir, las permutaciones de n objetos tomados de r en r. Para ello, observamos que se puede llenar la primera de las r posiciones en cualquiera de las n formas diferentes. Después, la segunda posición, puede llenarse de n-1 formas diferentes, y así sucesivamente.

Posición:	1	2	3	4	. . .	r
	↓	↓	↓	↓		↓
Número de elecciones:	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	. . .	$n-(r-1)$ (i.e., $n-r+1$)

El producto de estos r factores da el número de los diferentes modos de ordenar r elementos tomados de un conjunto de n elementos; es decir, las permutaciones de n elementos tomados de r en r.

$$_nP_r = (n)(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1),$$

siendo n y r enteros, $n \geq r$.

EJEMPLO 1: Calcular $_8P_4$.

Solución: En este caso, $n = 8$, $r = 4$ y $n - r + 1 = 5$. Por consiguiente,

$$_8P_4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680.$$

Obsérvese que hay r, en este caso 4, factores en el producto.

EJEMPLO 2: ¿Cuántas ternas pueden formarse con las 26

letras del alfabeto si cada letra sólo puede emplearse una vez?

Solución: Se quiere determinar el número de permutaciones de 26 elementos tomados de 3 en 3.

$${}_{26}P_3 = 26 \times 25 \times 24 = 15\,600.$$

Un caso particular de la fórmula de las permutaciones es cuando se consideran las permutaciones de n elementos tomados de n en n. Por ejemplo, veamos de cuántas formas diferentes se pueden ordenar en hilera los cinco miembros del conjunto M. En este caso se trata de las permutaciones de cinco elementos tomados de cinco en cinco:

$${}_5P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

En general, para n elementos tomados de n en n, $n = n$, $r = n$ y $n - r + 1 = 1$, ${}_nP_n = (n)\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ (3)\ (2)\ (1)$.

Para el producto de enteros de 1 hasta n, se utiliza el símbolo $n!$, léase "n factorial". Los siguientes ejemplos ilustran el uso de dicho símbolo:

$$1! = 1 \qquad 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$2! = 2 \times 1 \qquad 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$3! = 3 \times 2 \times 1 \qquad 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \qquad 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Por definición. $0! = 1$, pudiéndose emplear $(n - r)!$ en el caso $r = n$.

Utilizando la notación factorial estamos en condiciones de establecer una fórmula para ${}_nP_r$ distinta pero equivalente:

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$
$$\times \frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

EJEMPLO 3: Calcular ${}_7P_3$ de dos formas diferentes.

Solución:

(a) ${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5.$

(b) $${}_7P_3 = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6 \times 5.$$

EJEMPLO 4: Cierta clase consta de 10 muchachos y 12 niñas. Quieren elegir una directiva de tal forma que el presidente y el tesorero sean muchachos y el vicepresidente y el secretario sean niñas. ¿De cuántas formas pueden hacer la elección?

Solución: El número de formas diferentes en que puede elegirse el presidente y el tesorero es ${}_{10}P_2$. El número de formas de elegir al vicepresidente y al secretario es ${}_{12}P_2$. El número total de formas de elegir la directiva será:

$$({}_{10}P_2) \times ({}_{12}P_2) = (10 \times 9) \times (12 \times 11) = 11\,880.$$

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 8-2

Calcular:

1. $5!$

2. $6!$

3. $\frac{8!}{6!}$

4. $\frac{11!}{7!}$

5. ${}_7P_2$

6. ${}_7P_3$

7. ${}_{10}P_1$

8. ${}_{10}P_{10}$

9. ${}_{12}P_{12}$

10. ${}_{12}P_3$

11. ${}_6P_2$

12. ${}_6P_4$

13. ${}_{10}P_3$

14. ${}_{10}P_7$

Despejar el valor de n en:

15. ${}_nP_1 = 6$

16. ${}_nP_2 = 6$

17. ${}_nP_2 = 20$

18. ${}_nP_3 = 24$

19. Calcular el número de ordenamientos diferentes que se pueden formar con el conjunto de letras $v = \{a, e, i, o, u\}$ si se toman: **(a)** de dos en dos; **(b)** de cinco en cinco.

20. ¿Cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar utilizando los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, si no se puede repetir ningún dígito en el número? ¿De dichos números, cuántos serán pares?

21. ¿Cuántas señales diferentes se pueden formar con siete banderas si cada señal se hace con tres banderas colocadas una debajo de otra?

22. ¿De cuántas formas diferentes se puede emitir un programa musical con siete discos?

23. ¿De cuántas formas diferentes puede disponerse el orden de bateo de los 9 jugadores de un equipo de béisbol?

Determinar para todo número **n** *entero positivo una fórmula para:*

24. ${}_nP_r \times (n - r)!$ **25.** ${}_nP_0$

8-3 COMBINACIONES

En los problemas que se han resuelto relativos a permutaciones, el orden de los elementos que intervenían era importante. Por ejemplo, el número de formas de seleccionar un presidente y un vicepresidente del conjunto M se determinó como ${}_5P_2$. En dicho problema el orden es importante dado que, por ejemplo, Beatriz como presidente y Dolores como vicepresidente es un conjunto diferente del formado por Dolores como presidente y Beatriz como vicepresidente.

Supongamos ahora que queremos seleccionar un comité de dos miembros del conjunto M sin que nos interese el orden en que se seleccionan. De esta forma el comité formado por Beatriz y Dolores es, sin duda alguna, el mismo que el formado por Dolores y Beatriz. En este caso vemos que el orden no tiene importancia y se da el nombre de **combinación** a un tal ordenamiento. Una forma de determinar el número de comités de dos miembros que se pueden formar con el conjunto M, es por enumeración. Se determina, como sigue, diez posibles comités:

Beatriz—Dolores	Dolores—Juan
Beatriz—Elena	Dolores—Tomás
Beatriz—Juan	Elena—Juan
Beatriz—Tomás	Elena—Tomás
Dolores-Elena	Juan—Tomás

Resumimos lo anterior diciendo que el número de combinaciones de cinco elementos tomados de dos en dos es 10. Se expresa simbólicamente por

$$_5C_2 = 10.$$

En general se pretende establecer una fórmula para $_nC_r$, es decir, las combinaciones de n elementos tomados de r en r. Simbólicamente se expresa por

$$_nC_r \quad \text{o} \quad \binom{n}{r}.$$

Para determinar la fórmula de $_nC_r$ consideremos primero el problema concreto de seleccionar comités de tres elementos del conjunto M. Existen 10 posibilidades que a continuación se enumeran empleando sólo la inicial de cada nombre:

B, D, E	B, J, T	$M = \{B, D, E, J, T\}$
B, D, J	D, E, J	$_5C_3 = 10$
B, D, T	D, E, T	
B, E, J	D, J, T	
B, E, T	E, J, T	

Obsérvese que seleccionar comités de tres es equivalente a seleccionar grupos en los que se omiten dos. Es decir, por ejemplo, omitir a J y T es equivalente a seleccionar a B, D y E. Por consiguiente, deducimos que $_5C_3 = {_5C_2} = 10$.

En la medida que sólo nos interesan los comités, sin que se les asigne una función particular a cada uno de sus miembros, vemos que el orden no tiene importancia. Sin embargo, supongamos ahora que en cada comité debe seleccionarse un orador, un secretario y un presidente. ¿De cuántas formas puede hacerse tal selección dentro de cada comité? Es evidente que se trata de un problema con el cual el orden tiene importancia, interviniendo por consiguiente las permutaciones. El número de ordenamientos posibles dentro de cada comité en la forma que se desea es de $_3P_3$, es decir, 3!

Por ejemplo, el comité formado por B, D y E puede reordenarse, teniendo en cuenta la elección de un orador, un secretario y un presidente, como sigue:

$$B, D, E; \quad B, E, D; \quad D, E, B; \quad D, B, E; \quad E, B, D; \quad E, D, B.$$

Todas estas seis permutaciones constituyen una sola combinación.

Sabemos que ${}_5C_3 = 10$. Si cada una de estas combinaciones se multiplica por 3! entonces se obtiene el número total de permutaciones de cinco elementos tomados de tres en tres:

$${}_5C_3 \times 3! = {}_5P_3 \quad \text{y} \quad {}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!}.$$

Consideremos en general ${}_nC_r$. Cada una de estas combinaciones que consta de r elementos puede utilizarse para formar $r!$ permutaciones. Por consiguiente, el número de combinaciones de n elementos tomados de r en r está dado por la fórmula

$${}_nC_r \times r! = {}_nP_r \quad \text{y} \quad {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}.$$

Dado que

$${}_nP_r = (n)(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!},$$

se deduce la fórmula

$${}_nC_r = \frac{(n)(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

EJEMPLO 1: Calcular ${}_7C_2$ de dos formas diferentes.

Solución:

(a) ${}_7C_2 = \dfrac{{}_7P_2}{2!} = \dfrac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21.$

(b) ${}_7C_2 = \dfrac{7!}{2!5!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 21.$

EJEMPLO 2: ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir cinco cartas de una baraja de 52?

Solución: El orden de las cinco cartas no tiene importancia; se trata, por consiguiente, de un problema de combinaciones.

$$_{52}C_5 = \frac{52!}{5!\,47!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times (47!)}{5!\qquad (47!)} = 2\,598\,960.$$

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 8-3

En los Ejercicios del 1 al 5 calcular:

1. **(a)** $\frac{6!}{4!\,2!}$ **(b)** $\frac{8!}{5!\,3!}$

2. **(a)** $\frac{10!}{4!\,6!}$ **(b)** $\frac{12!}{7!\,5!}$

3. **(a)** $_7C_2$ **(b)** $_7C_3$

4. **(a)** $_8C_3$ **(b)** $_9C_4$

5. **(a)** $_{11}C_2$ **(b)** $_{15}C_3$

6. Enumerar las permutaciones $_3P_2$ de los elementos del conjunto $\{a, b, c\}$. Identificar después las permutaciones que representan las mismas combinaciones y determinar $_3C_2$.

7. Enumerar las permutaciones $_4P_3$ de los elementos del conjunto$\{p, q, r, s\}$.Identificar después las permutaciones que representan las mismas combinaciones y determinar $_4C_3$.

8. Enumerar los elementos de cada combinación $_4C_3$ para el conjunto $\{w, x, y, z\}$. Después aparear cada una de estas combinaciones con una combinación de $_4C_1$, y a partir de ello ilustrar el hecho de que $_4C_3 = {_4C_1}$.

9. Determinar una fórmula para $_nC_n$, n entero positivo.

10. Determinar el valor y dar una explicación de $_nC_0$, n entero positivo.

11. Calcular ${}_3C_0$, ${}_3C_1$, ${}_3C_3$, y verificar que la suma de esas combinaciones es 2^3, el número de subconjuntos posibles que pueden formarse con un conjunto de tres elementos.

12. Calcular ${}_5C_0$, ${}_5C_1$, ${}_5C_2$, ${}_5C_3$, ${}_5C_4$, ${}_5C_5$ y verificar la suma como en el Ejercicio 11.

13. Aplicando los resultados obtenidos en los Ejercicios 11 y 12 deducir una fórmula para n entero positivo.

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n.$$

14. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero pueden obtenerse de un conjunto de cinco monedas de 1¢, de 5¢, 10¢, 25¢ y 50¢? (se incluye el caso de cero monedas).

15. Una persona tiene en el bolsillo cinco monedas de diferentes denominaciones. ¿De cuántas formas diferentes puede sacar dos monedas?

16. Una clase consta de 10 muchachos y 12 muchachas. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar si cada uno de ellos debe constar de 2 muchachos y 2 muchachas?

17. ¿De cuántas formas se pueden repartir 13 cartas de una baraja de 52?

18. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar tres libros de un conjunto de siete?

19. Explique por qué un candado llamado de "combinación" podría dársele el nombre de candado de permutación.

20. Una caja A contiene cinco pelotas y una caja B contiene diez pelotas. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar diez pelotas si deben tomarse tres de la caja A y siete de la caja B?

21. Una caja contiene siete pelotas negras y tres blancas. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar cuatro pelotas? ¿De dichas selecciones, cuántas constarán de tres pelotas negras?

22. Repetir el Ejercicio 21 considerando que la caja contiene diez pelotas negras y cinco blancas.

***23.** Demostrar algebraicamente que ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 8-3

En cada problema dígase si se trata de permutaciones, combinaciones o de ambas cosas. Después resuélvase el problema.

1. Los 20 jugadores de un club de tenis tienen que jugar un domingo. ¿De cuántas formas se pueden formar parejas para que jueguen "singles"?

2. ¿De cuántas formas diferentes se puede de un conjunto de 10 discos: (a) seleccionar 4 discos para utilizarse en un programa? (b) presentar un programa en el que se toquen 4 discos?

3. En un examen los alumnos deben contestar cuatro de ocho preguntas. ¿De cuántas formas puede un alumno seleccionar las cuatro preguntas que trata de contestar?

4. ¿De cuántas formas pueden hacer cola frente a una taquilla 7 personas?

5. ¿Cuántas rectas se determinan con diez puntos si tres cualesquiera de ellos no están alineados?

6. ¿De cuántas formas se puede seleccionar un equipo de 9 jugadores de un grupo de 15 muchachos?

7. ¿De una baraja de 52 cartas, de cuántas formas se pueden dar: (a) 4 cartas? (b) 7 cartas?

8. En un coche de 6 plazas, ¿de cuántas formas se pueden sentar 5 pasajeros en los 5 asientos que quedan después que el conductor se ha sentado?

9. ¿De cuántas formas se pueden colgar 4 cuadros; uno en cada una de las cuatro paredes de un cuarto?

10. Se quiere dividir una clase en dos comités. De un grupo de ocho alumnos, ¿de cuántas formas diferentes pueden quedar asignados a uno de los comités todos o algunos de los ocho alumnos?

11. ¿De cuántas formas pueden dividirse ocho alumnos en dos grupos de igual número de alumnos?

12. ¿De cuántas formas diferentes pueden dividirse ocho alumnos en dos grupos?

8-4 DEFINICION DE PROBABILIDAD

Cuando se tira una moneda al aire sabemos que hay dos formas diferentes en las que la moneda puede caer, cara o cruz. Se dice que la probabilidad de que caiga cara es de uno entre dos o simplemente 1/2.

Al tirar un dado hay seis formas diferentes en las que el dado puede caer. Se dice que la probabilidad de obtener un 5 en una tirada del dado es de uno entre seis, o 1/6.

En estos dos ejemplos, los sucesos que pueden presentarse se dice que son **mutuamente exclusivos.** Es decir, puede presentarse uno y sólo uno de los eventos cada vez. Cuando se tira una moneda, hay dos posibles (cara y cruz); uno y sólo uno de ellos puede presentarse. Cuando se tira un dado hay seis eventos (1, 2, 3, 4, 5, 6); uno y sólo uno de ellos puede presentarse. Podemos definir ahora la probabilidad en términos generales, como sigue:

Si un evento puede presentarse en una cualquiera de n formas mutuamente exclusivas y si m de dichas formas se consideran favorables, entonces la **probabilidad** $P(A)$ de que se presente un evento favorable A está dado por la fórmula

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

La probabilidad $\frac{m}{n}$ satisface la relación $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$ dado que m y n son enteros y $m \leq n$. Cuando el suceso es inevitable, $m = n$ y la probabilidad es 1; cuando no es posible que un evento ocurra, $m = 0$ y la probabilidad es 0. Por ejemplo, la probabilidad de obtener ya sea cara o cruz al tirar una moneda es 1 (partimos del supuesto que la moneda nunca caerá de canto). La probabilidad de obtener una suma de 13 al tirar un par de dados es 0. (A menos que se indique otra cosa, al hablar de dados nos referimos a los dados comunes y corrientes).

La suma de la probabilidad de que un evento ocurra y la probabilidad de que el evento no ocurra es 1.

$$\text{Si } P(A) = \frac{m}{n}, \text{ entonces } P\ (\text{no } A) = 1 - \frac{m}{n}.$$

EJEMPLO 1: Se saca al azar una carta de una baraja de 52.

¿Cuál es la probabilidad de que sea un trébol? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un trébol? ¿Cuál es la probabilidad de que sea un as o un trébol?

Solución: De las 52 cartas, 13 son tréboles. Por consiguiente, la probabilidad de sacar un trébol es de 13/52, es decir, 1/4. La probabilidad de que la carta no sea trébol es de 1 — 1/4, es decir, 3/4. Hay 4 ases y 12 tréboles, además del as de trébol. Por consiguiente, la probabilidad de que la carta sea un as o un trébol es $(4 + 12)/52$; es decir 4/13.

EJEMPLO 2: Se va a seleccionar al azar un comité de dos personas del conjunto $M =$ {Beatriz, Dolores, Elena, Juan, Tomás}. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos miembros del comité sean mujeres?

Solución: Se trata de un problema de combinaciones ya que el orden en el que aparezcan los nombres no tiene importancia. El número total de formas en las que pueden seleccionarse dos personas del conjunto de cinco es ${}_5C_2$. Dado que hay tres mujeres en el conjunto M, el número de formas en las que pueden seleccionarse dos mujeres es ${}_3C_2$.

$$ {}_3C_2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3; \qquad {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10. $$

La probabilidad de que ambos miembros seleccionados sean mujeres es

$$ \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}. $$

Obsérvese que el conocimiento adquirido sobre combinaciones nos ha permitido expresar fácilmente en símbolos la solución al Ejemplo 2. Podríamos haber resuelto, sin embargo, el problema enumerando todas las posibilidades, aunque dicho proceso puede resultar un tanto tedioso. Como en §8-3 el conjunto de todos los posibles comités de dos elementos seleccionados del conjunto M es

Beatriz—Dolores	Dolores—Juan
Beatriz—Elena	Dolores—Tomás
Beatriz—Juan	Elena—Juan
Beatriz—Tomás	Elena—Tomás
Dolores—Elena	Juan—Tomás

De los diez posibles comités, hay tres (los encerrados en un recuadro) que están formados de dos mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un comité que conste de dos hombres?

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 8-4

Al tirar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga:

1. Un número par?
2. Un número impar?
3. Un número mayor que 3?
4. Un número menor que 5?
5. Un número diferente de 5?
6. Un número diferente de 7?
7. El número 7?
8. Un número par o un número mayor que 3?
9. Un número impar o un número menor que 5?
10. Un número impar o un número mayor que 4?
11. Un número par o un número mayor que 6?
12. Un número impar o un número mayor que 10?
13. Un número impar o un número menor que 6?
14. Un número par o un número menor que 10?

En los Ejercicios del 15 al 18 determinar la probabilidad de sacar la carta que se indica de una baraja de 52 cartas:

15. Un as.

16. Un rey.

17. Un trébol.

18. Una carta roja.

19. La probabilidad de obtener siempre cara al tirar tres veces una moneda es 1/8. ¿Cuál es la probabilidad de que no salgan las tres caras al tirar la moneda?

20. ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima persona que conozca no haya nacido en domingo?

8-5 ESPACIOS MUESTRALES

A veces resulta conveniente resolver los problemas de probabilidad haciendo una lista de todos los posibles sucesos. Tal lista recibe el nombre de **espacio muestral.** Consideremos primero el problema de tirar dos monedas. El espacio muestral para este problema está dado por el siguiente conjunto de todos los posibles sucesos ($A =$ cara, $B =$ cruz):

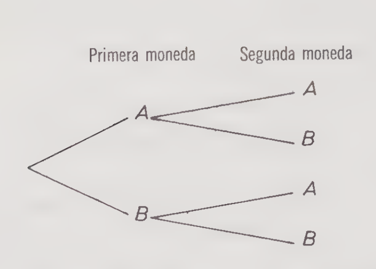
$$\{AA, AB, BA, BB\}$$

Podemos también resumir dichos datos por medio de la siguiente tabla:

Primera moneda	Segunda moneda
A	A
A	B
B	A
B	B

Otra forma conveniente de enumerar todas las posibilidades es por medio de un diagrama arbolado, en el que cada una de las ramas representa una de las posibilidades. El conjunto de los posibles sucesos, $\{AA, AB, BA, BB\}$, puede leerse en el diagrama. Obsérvese que hay cuatro posibles eventos: que salgan dos caras ocurre en un evento; que salga una cara y una cruz ocurre en dos eventos; que no salgan caras (es decir, que salgan dos cruces) ocurre en un even-

to. Por consiguiente podemos hacer una lista de las probabilidades de dichos eventos, como sigue:



Evento	Probabilidad
2 caras	$\frac{1}{4}$
1 cara	$\frac{2}{4}$
0 caras	$\frac{1}{4}$

Dado que se han considerado todas las posibilidades, la suma de las probabilidades deberá ser 1; en efecto, $1/4 + 2/4 + 1/4 = 1$. Esto proporciona un método de comprobación. La lista de probabilidades recibe el nombre de **distribución de probabilidad.**

Para el caso de tres monedas se puede hacer el siguiente diagrama arbolado y ordenamiento.

Primera moneda — Segunda moneda — Tercera moneda

Primera moneda	Segunda moneda	Tercera moneda
A	A	A
A	A	B
A	B	A
A	B	B
B	A	A
B	A	B
B	B	A
B	B	B

A partir del diagrama arbolado podemos enumerar las probabilidades del número de caras que salen por medio de la siguiente distribución.

Evento	Probabilidad
0 caras	$\frac{1}{8}$
1 cara	$\frac{3}{8}$
2 caras	$\frac{3}{8}$
3 caras	$\frac{1}{8}$

En cada uno de los casos, tanto para dos monedas como para tres, la suma de las probabilidades es 1; es decir, se han considerado todos los eventos posibles y dichos eventos son mutuamente exclusivos. Obsérvese también que para dos monedas había cuatro posibles sucesos en tanto que, para tres monedas hay ocho. En general, para n monedas habrá 2^n posibles sucesos.

Cada una de las distribuciones precedentes es un ejemplo de una **distribución binomial** dado que cada una de ellas está basada en la ocurrencia de una de *dos* posibilidades, en este caso cara o cruz.

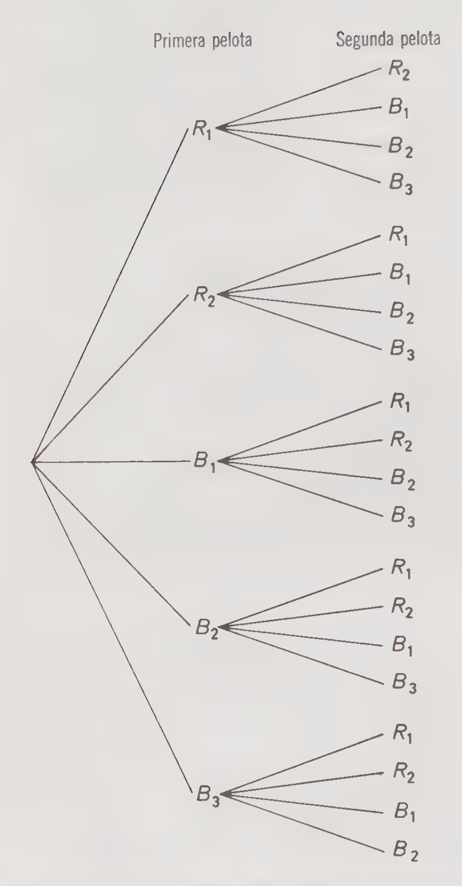
EJEMPLO 1: Una bolsa contiene dos pelotas rojas y tres blancas. Si se sacan una a una dos pelotas, hágase un muestreo de dicho experimento.

Solución: Para identificar individualmente cada pelota, representemos por R_1 y R_2 las pelotas rojas y por B_1, B_2 y B_3 las pelotas blancas. El muestreo es el que sigue:

$$\begin{array}{lllll} R_1R_2, & R_2R_1, & B_1R_1, & B_2R_1, & B_3R_1 \\ R_1B_1, & R_2B_1, & B_1R_2, & B_2R_2, & B_3R_2 \\ R_1B_2, & R_2B_2, & B_1B_2, & B_2B_1, & B_3B_1 \\ R_1B_3, & R_2B_3, & B_1B_3, & B_2B_3, & B_3B_2 \end{array}$$

EJEMPLO 2: Utilícese un diagrama arbolado para mostrar los distintos casos posibles del Ejemplo 1.

Solución:



EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 8-5

Hágase uso del espacio muestral del Ejemplo 1 para calcular la probabilidad de que:

1. Ambas pelotas sean rojas.
2. Ambas pelotas sean blancas.
3. La primera pelota sea roja.
4. La primera pelota sea roja y la segunda blanca.
5. Una pelota sea roja y la otra blanca.

En los Ejercicios del 6 al 8 hágase uso del espacio muestral para determinar la probabilidad de que al echar tres monedas:

6. Las tres sean caras.

7. Al menos dos sean caras.

8. Al menos una sea cruz.

9. Constrúyase el espacio muestral correspondiente al caso de echar cuatro monedas.

En los Ejercicios del 10 al 12 utilícese el espacio muestral del Ejercicio 9 para determinar la probabilidad de que:

10. Las cuatro monedas sean caras.

11. Al menos tres monedas sean caras.

12. Al menos dos monedas sean cruz.

13. Constrúyase el espacio muestral de los sucesos al tirar un par de dados. Enumérense los sucesos como una pareja ordenada de números. Por ejemplo, (1, 3) representa un 1 para el primer dado y un 3 para el segundo.

En los Ejercicios del 14 al 22 utilícese el espacio muestral del Ejercicio 13 para determinar la probabilidad de que:

14. El número del primer dado sea 2.

15. El número 2 aparezca en los dos dados.

16. En los dos dados aparezca el mismo número.

17. La suma de los números que se obtienen sea 11.

18. La suma de los números que se obtienen no sea 11.

19. La suma de los números que se obtienen sea 7.

20. La suma de los números que se obtienen no sea 7.

21. El número de un dado sea el doble que el del otro.

22. El número de un dado sea tres unidades mayor que el del otro.

23. Una caja contiene 2 pelotas rojas R_1 y R_2 y dos pelotas blancas B_1 y B_2. Hágase un espacio muestral de los sucesos al sacar 2 pelotas una tras otra sin devolverlas a la caja. Determinar la probabilidad de que ambas sean rojas.

24. Repítase el Ejercicio 23 para el caso en el que la primera pelota se devuelve a la caja antes de sacar la segunda.

25. Repítase el Ejercicio 23 considerando que la caja contiene 3 pelotas rojas y 2 blancas.

***26.** Considérese la serie mundial de béisbol entre los Dodgers (D) y los Yankees (Y). Se supone que cada equipo está en igualdad de condiciones para ganar cada uno de los juegos. Para ganar la serie es necesario ganar 4 juegos y por lo tanto es posible que se requieran 7 juegos. Hágase un diagrama arbolado para la serie bajo el supuesto de que los Dodgers ganan los dos primeros juegos. Determinar la probabilidad de que los Dodgers ganen la serie en el cuarto juego, en el quinto, en el sexto y en el séptimo juego. Determinar la probabilidad de que los Yankees ganen la serie en cada uno de dichos juegos. Verifíquese el resultado observando que la suma de las probabilidades en cada uno de estos casos debe ser 1.

***27.** Hay tres cartas en una caja. Una es roja por ambos lados, otra es blanca por ambos lados y la tercera es roja por un lado y blanca por el otro. Se saca una carta al azar y se coloca sobre una mesa. El lado visible es rojo. ¿Cuál es la probabilidad de que el lado que no se ve sea también rojo? (Advertencia: el resultado no es 1/2).

8-6 CALCULO DE PROBABILIDADES

Si A y B representan dos eventos mutuamente exclusivos, entonces

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B).$$

Es decir, la probabilidad de que suceda uno o el otro evento es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los eventos. Consideremos, por ejemplo, la probabilidad de sacar un as o una figura (es decir, una sota, reina o rey) de una baraja de 52 cartas.

La probabilidad de sacar un as, $P(A)$, es 4/52.
La probabilidad de sacar una figura, $P(B)$, es 12/52.
Por lo tanto, $P(A \text{ o } B) = 4/52 + 12/52 = 16/52 = 4/13$.

EJEMPLO 1: Una bolsa contiene 3 pelotas rojas, 2 negras y 5 amarillas. Calcular la probabilidad de que al sacar una pelota al azar, ésta sea roja o negra.

Solución: La probabilidad de sacar una pelota roja, $P(R)$, es 3/10. La probabilidad de sacar una pelota negra, $P(N)$, es 2/10. Por lo tanto

$$P(R \text{ o } N) = P(R) + P(N) = 5/10 = 1/2.$$

Este proceso puede generalizarse para determinar la probabilidad de un número finito de eventos mutuamente exclusivos.

$$P(A \text{ o } B \text{ o } C \text{ o } \ldots) = P(A) + P(B) + P(C) + \ldots$$

EJEMPLO 2: Se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar o un número mayor que 3?

Solución: Son tres los números impares posibles (1, 3, 5), y por consiguiente la probabilidad de sacar un número impar es 3/6. La probabilidad de sacar un número mayor que 3 (es decir, 4, 5, 6) es también 3/6. Sumando dichas probabilidades se obtiene $3/6 + 3/6 = 1$. Es obvio que hay algo erróneo ya que una probabilidad de 1 implica una seguridad total, lo cual no es posible en este ejemplo, ya que al salir un 2, evento posible, dicho número ni es impar ni mayor que 3. La dificultad estriba en el hecho de que los eventos *no* son mutuamente exclusivos; un número puede ser a la vez impar y mayor que 3. En concreto, el 5 es impar y al mismo tiempo mayor que 3. Por consiguiente, $P(5)$, es decir 1/6 se ha incluido dos veces en el resultado, debiéndose pues restar una vez. El resultado correcto será $3/6 + 3/6 - 1/6$, es decir, 5/6.

En casos análogos al del Ejemplo 2 debe restarse la probabilidad de los eventos que se presentan simultáneamente. Por consiguiente, en el caso de que A y B no sean eventos mutuamente exclusivos, se tiene

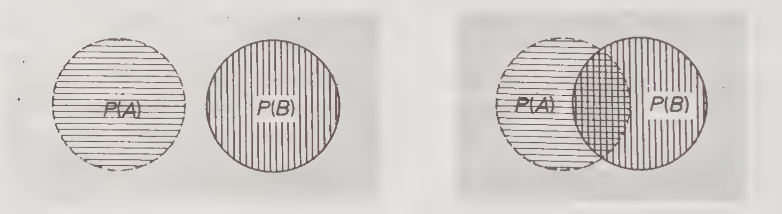
$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Obsérvese que en el Ejemplo 2 se tenían las siguientes probabilidades:

$P(A)$, la probabilidad de un número impar es 3/6.
$P(B)$, la probabilidad de un número mayor que 3 es 3/6.
$P(A \text{ y } B)$, la probabilidad de que un número (en este caso 5) sea impar y mayor que 3, es 1/6.
$P(A \text{ o } B) = 3/6 + 3/6 - 1/6 = 5/6$.

Por medio de una lista se puede ver que cinco de las seis posibilidades del Ejemplo 2 son impares o mayores que 3, a saber, el 1, 3, 4, 5 y 6. El único número con el que se "pierde" es el 2. Por consiguiente la probabilidad $P(A \text{ o } B)$ será 5/6.

Estas dos situaciones $P(A \text{ o } B)$ y $P(A \text{ y } B)$ que hemos considerado pueden también exponerse por medio de los diagramas de Euler (véase §4-5) en los cuales los puntos de las regiones circulares representan las probabilidades de los eventos.



La primera figura representa eventos mutuamente exclusivos:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

En la segunda figura, la región sombreada en ambos sentidos, horizontal y vertical, representa $P(A \text{ y } B)$, $P(A \text{ y } B) \neq 0$, los eventos que son **eventos dependientes** (no mutuamente exclusivos) teniéndose

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Es necesario restar $P(A \text{ y } B)$ dado que se ha considerado dos veces en la suma $P(A) + P(B)$.

Consideraremos ahora la probabilidad de diversos eventos que ocurren uno tras otro. Consideremos la probabilidad, al echar dos veces una moneda, de obtener cara en la primera y cruz en la segunda. Mediante un espacio muestral se puede ver que la probabilidad es 1/4.

$$\{AA, \ AB, \ BA, \ BB\}$$

Además se ve que la probabilidad $P(A)$, de que en la primera tirada salga cara, es 1/2. La probabilidad, $P(B)$, de que en la segunda tirada salga cruz, es 1/2. Por lo tanto, $P(A \text{ y } B) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$. Obsérvese que dichos eventos son **independientes,** es decir, el evento de la primera tirada no afecta a la segunda.

En general, si $P(A)$ es la probabilidad de que ocurra un evento A y $P(B)$ es la probabilidad de que ocurra un segundo evento B, independiente de A, después de ocurrir A, entonces

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$$

Esto puede generalizarse para un número finito cualquiera de eventos independientes

$$P(A \text{ y } B \text{ y } C \text{ y } \ldots) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times \ldots$$

EJEMPLO 3: Una bolsa A contiene tres pelotas blancas y cinco rojas. Una bolsa B contiene cuatro pelotas blancas y tres rojas. Se saca una pelota de cada bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?

Solución: Sean, $P(A)$ la probabilidad de sacar una pelota roja de la Bolsa A y $P(B)$ la probabilidad de sacar una pelota roja de la Bolsa B. Entonces

$P(A) = 5/8$, $P(B) = 3/7$, $P(A \text{ y } B) = 5/8 \cdot 3/7 = 15/56$.

EJEMPLO 4: Se sacan dos cartas, una tras otra, de una baraja de 52. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean ases?

Solución: La probabilidad de que la primera carta sea un as es 4/52. La probabilidad del suceso depende de la primera carta. Si ésta es un as, entonces la probabilidad de que la segunda carta sea un as es 3/51. La probabilidad de que ambas cartas sean ases es $4/52 \times 3/51$, es decir, 1/221. El problema también puede resolverse observando que ${}_{52}C_2$ es el número total de formas de seleccionar dos cartas de una baraja de 52. Por otra parte, ${}_4C_2$ es el número total de formas de seleccionar dos ases de los cuatro ases de la baraja. Por lo tanto, la probabilidad deseada está dada por

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{52}C_2} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{52!}{2!50!}} = \frac{4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{221}.$$

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 8-6

Se saca una carta de una baraja de 52. En los Ejercicios del 1 al 7 calcular la probabilidad de que la carta sea:

1. Un as o un rey.
2. Un trébol o un corazón.
3. Un trébol o un rey.
4. Un trébol y un rey.
5. Un trébol y una reina.
6. Un corazón o un rey o una reina.
7. Un basto o un as o un rey.

8. Se sacan dos cartas, una tras otra, de una baraja de 52. Calcular la posibilidad de que: **(a)** ambas cartas sean tréboles; **(b)** que ambas cartas sean ases de tréboles; **(c)** la primera carta sea un trébol y la segunda un corazón; **(d)** la primera carta sea un as y la segunda el rey de corazones; **(e)** ambas cartas sean del mismo palo.

9. Repítase el Ejercicio 8 considerando que después de sacar la primera carta, ésta se reintegra en la baraja.

10. Se echa una moneda cinco veces. ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco veces salga cara?

11. Se echa una moneda cinco veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salga al menos una cara? (*Sugerencia:* Calcúlese primero la probabilidad de que no salgan caras).

12. Se echan una moneda y un dado. Calcular la probabilidad de obtener: **(a)** cara y un 3; **(b)** cara y un número par; **(c)** cara o un 3; **(d)** cara o un número par.

13. Una caja contiene 3 pelotas rojas y 7 pelotas blancas. **(a)** Si se saca una pelota al azar, determinar la probabilidad de que sea blanca. **(b)** Si se sacan dos pelotas al azar, determinar la probabilidad de que ambas sean blancas.

14. Se sacan cinco cartas al azar de una baraja de 52. Determinar la probabilidad de que: **(a)** las cinco cartas sean tréboles; **(b)** se saquen los cuatro ases.

15. Una caja contiene tres pelotas rojas, cuatro blancas y cinco verdes. Se sacan, una a una, tres pelotas. Calcular la probabilidad de que: **(a)** las tres pelotas sean rojas; **(b)** la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera verde; **(c)** ninguna sea verde: **(d)** las tres sean del mismo color.

16. Repítase el Ejercicio 15 considerando que tras sacar cada pelota se vuelve a echar a la caja.

17. Se echa un dado tres veces. Calcular la probabilidad de que: **(a)** salga el 6 la primera vez; **(b)** salga el 6 las dos primeras veces; **(c)** en las tres veces salga el 6; **(d)** la primera vez salga 6 y que éste no salga en la segunda ni la tercera vez.

18. Se echa un dado tres veces. Calcular la probabilidad de que: **(a)** salga un número par las tres veces; **(b)** salga un número par las dos primeras veces y un número impar la tercera; **(c)** salga un número impar la primera vez y números pares la segunda y la tercera; **(d)** que salga sólo un número par.

***19.** Se echa un dado tres veces. Determinar la probabilidad de que **(a)** al menos salga un 6; **(b)** solamente salga un 6.

***20.** Se sacan cinco cartas de una baraja de 52. Calcular la probabilidad de que salgan 3 ases y 2 reyes.

8-7 APUESTAS Y ESPERANZA MATEMATICA

Es frecuente leer en la sección deportiva de los periódicos noticias referentes a las "apuestas" a favor o en contra de un equipo en cuanto a que gane o pierda algún partido. Por ejemplo, se puede leer que las apuestas a favor de los "Cardenales" para ganar el gallardete están "4 a 1". En esta sección se pretende determinar el significado real de tales enunciados.

Consideremos el problema de determinar la apuesta en contra de obtener un 3 al tirar un dado. Dado que la probabilidad de obtener un 3 es, como se sabe, 1/6, mucha gente cree que las apuestas deben estar 6 a 1 en contra de que salga un 3. Esto no es correcto ya que de cada seis tiradas del dado, a la larga, se puede esperar que salga un 3. En las otras cinco tiradas del dado se espera que no salga el 3. Por consiguiente las apuestas correctas en contra de que salga un 3 en una tirada de un dado son 5 a 1. Las apuestas a favor de que salga un 3 son 1 a 5. Formalmente se pueden definir las apuestas como sigue:

Las **apuestas a favor** de un evento se definen como la razón de la probabilidad de que el evento suceda y la probabilidad de que el evento no ocurra. La razón inversa determina las **apuestas en contra** de que el evento ocurra.
Por consiguiente, las apuestas a favor de un evento que puede ocurrir indistintamente de varias formas es la razón entre el número de formas favorables y el número de formas desfavorables.

EJEMPLO 1: Calcular las apuestas a favor de sacar un trébol de una baraja de 52 cartas.

Solución: Dado que hay 13 tréboles en una baraja, la probabilidad de sacar un trébol es $13/52 = 1/4$. La probabilidad de no sacar un trébol es $3/4$. Las apuestas a favor de obtener un trébol son $1/4 : 3/4$, es decir, $1/3$.

Las apuestas a favor de sacar un trébol se enuncian como $1/3$. También puede decirse que están "1 a 3" o "1:3". En forma análoga, las apuestas en contra de sacar un trébol son $3/1$, pudiéndose decir que están "3 a 1" o "3:1".

La **esperanza matemática** está íntimamente ligada a las apuestas y se define como el producto de la probabilidad de que un evento suceda por la cantidad que se percibe al ocurrir tal suceso. Supongamos que se reciben $2.00 cada vez que se obtienen dos caras al tirar dos monedas. Por cualquier otro suceso no se recibe nada. Entonces la esperanza matemática será un cuarto de $2.00, es decir $0.50. Esto significa que se debe estar dispuesto a pagar $0.50 cada vez que se tiran las monedas. A la larga los dos contrincantes en el juego saldrán a la par. Por ejemplo, si se juega cuatro veces el costo será de 4 × $0.50, es decir, $2.00. Se espera ganar, a la larga, una vez cada cuatro juegos. De ser así, se ganarán $2.00 una vez cada cuatro juegos, quedando por lo tanto a la par.

Si un juego tiene varios posibles resultados cuyas probabilidades son p_1, p_2, p_3, etc., y por cada uno de dichos resultados, las cantidades que se perciben son m_1, m_2, m_3, etc., entonces la esperanza matemática, E, puede definirse como:

$$E = m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 + \cdots$$

Cuando se aplica esta fórmula es conveniente comprobar que se han tenido en cuenta todos los resultados posibles, verificando que la suma de las probabilidades es 1.

EJEMPLO 2: Supongamos que se toma parte en un juego en el cual se tira una moneda dos veces y se reciben 10 centavos si salen dos caras, 5 centavos si sale una cara y no se gana nada si las dos veces sale cruz. ¿Cuál es el valor de la esperanza matemática en el juego?

Solución: Las probabilidades respectivas de sacar dos caras, una y ninguna son 1/4, 1/2 y 1/4. Por consiguiente, el valor de E en centavos es

$$E = (10)(\tfrac{1}{4}) + (5)(\tfrac{1}{2}) + (0)(\tfrac{1}{4}) = 5.$$

El resultado puede interpretarse de diversos modos. Por un lado, es el precio que debe pagarse por tener el privilegio de jugar el juego. Puede también interpretarse como la ganancia media por juego que se puede esperar cuando se repite un gran número de veces el juego.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 8-7

Determinar la apuesta a favor de obtener:

1. Dos caras al echar una vez dos monedas.

2. Al menos dos caras al echar una vez tres monedas.

3. Dos caras al echar una moneda dos veces.

4. Al menos dos caras al echar una moneda tres veces.

En los Ejercicios del 5 al 8 determinar la apuesta en contra de obtener:

5. Dos caras al echar una vez dos monedas.

6. Un as, al sacar una carta de una baraja de 52.

7. Un as o un rey al sacar una carta de una baraja de 52.

8. Un 7 o un 11 al echar una vez un par de dados.

9. ¿Cuál es la apuesta a favor de sacar un 7 o un 11 al echar un par de dados?

10. Se venden cien billetes de un rifa. El premio es de $1 000.00. ¿Cuál es el precio justo de cada billete?

11. Repetir el Ejercicio 10 para el caso en que se venden 250 billetes.

12. ¿Cuál es la esperanza matemática al comprar uno entre 300 billetes de una rifa cuyo único premio es de $750?

13. ¿Cuál es la esperanza matemática de un juego en el cual se reciben $10.00 si se saca un "doble" (el mismo número en ambos dados) ?

14. Una caja contiene tres monedas de 10 ¢ y dos de 25 ¢. Se trata de sacar una moneda al azar, la cual constituye el premio del juego. Considerando que no se pueda determinar el valor de la moneda por su tamaño, ¿cuál sería el precio justo por el derecho a participar en el juego?

15. Hay tres cajas idénticas sobre una mesa. Una contiene un billete de cinco pesos; otra contiene un billete de un peso y la

tercera está vacía. A una persona se le permite elegir una de las cajas y quedarse con su contenido. ¿Cuál es la esperanza?

16. Se echan tres monedas. ¿Cuál es el número esperado de caras?

17. Se van a extraer dos billetes de una bolsa que contiene tres billetes de cinco pesos y dos billetes de 10 pesos. ¿Cuál es la esperanza matemática de esta extracción?

18. Se dan tres cartas de una baraja de 52. ¿Cuál es la apuesta en contra de que las tres sean del mismo palo?

19. En un sombrero hay dos monedas de 1 centavo, una moneda de 10¢, una moneda de 5¢, una moneda de 25¢ y una moneda de 50¢. ¿Cuál es la esperanza matemática del valor de la moneda cuando se saca una al azar?

8-8 EL TRIANGULO DE PASCAL

El último problema que consideraremos en este capítulo es el que consiste en determinar el número de subconjuntos diferentes que se pueden formar a partir de un conjunto dado. Para ilustrarlo consideraremos de nuevo el conjunto M:

$$M = \{\text{Beatriz, Dolores, Elena, Juan, Tomás}\}$$

Se quiere saber el número de comités diferentes que se pueden formar compuestos de 0, 1, 2, 3, 4 y 5 miembros. Cada uno de dichos números se puede determinar como sigue:

$${}_5C_0 = 1; \quad {}_5C_1 = 5; \quad {}_5C_2 = 10; \quad {}_5C_3 = 10; \quad {}_5C_4 = 5; \quad {}_5C_5 = 1.$$

Recuérdese que la notación ${}_nC_r$ puede también escribirse en la forma $\binom{n}{r}$. Así, los resultados precedentes pueden escribirse en la forma:

$$\binom{5}{0} = 1; \qquad \binom{5}{1} = 5; \qquad \binom{5}{2} = 10;$$

$$\binom{5}{3} = 10; \qquad \binom{5}{4} = 5; \qquad \binom{5}{5} = 1.$$

Emplearemos la forma $\binom{n}{r}$ a fin de simplificar los ordenamientos de esta sección. En cualquier caso el número total dé subconjuntos de un conjunto de cinco elementos es $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$, es decir, 32.

De igual modo, si el conjunto original consistiese de sólo cuatro elementos, el número de comités diferentes de 0, 1, 2, 3 y 4 miembros cada uno se determinaría como sigue:

$$\binom{4}{0} = 1; \quad \binom{4}{1} = 4; \quad \binom{4}{2} = 6; \quad \binom{4}{3} = 4; \quad \binom{4}{4} = 1.$$

Obsérvese que $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.

Existe una forma práctica de resumir dichos datos para conjuntos de n elementos, donde $n = 1, 2, 3 \ldots$:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n = 1: & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n = 2: & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n = 3: & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n = 4: & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n = 5: & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\cdots & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Si se sustituye cada símbolo por su valor numérico se obtiene el siguiente ordenamiento conocido como el **triángulo de Pascal.** Este ordenamiento numérico que se atribuye al matemático francés Blaise Pascal (1623-1662) se supone que era conocido de los chinos del décimocuarto siglo.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n = 1: & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n = 2: & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n = 3: & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n = 4: & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n = 5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdots & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Cada uno de los renglones de este ordenamiento se lee observando que el primer elemento en el n-esimo renglón es $\binom{n}{0}$, el segundo es $\binom{n}{1}$, el tercero es $\binom{n}{2}$, y así sucesivamente hasta el último elemento que es $\binom{n}{n}$. Dado que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, cada renglón empieza y termina con 1.

Hay un modo muy sencillo de continuar el ordenamiento mediante un cálculo elemental. En cada renglón el primero y el último número es 1. Cada uno de los siguientes números puede obtenerse como la suma de los dos números que aparecen en el renglón anterior a la derecha y a la izquierda de la posición que ocupará el número que se busca. Así, para obtener el sexto renglón, se empieza con 1. Después, el siguiente elemento se determina sumando el 1 y el 5 del quinto renglón.

Después se suman el 5 y el 10 obteniéndose 15 para el tercer elemento; se suman ahora el 10 y el 10 y se obtiene 20 para el cuarto elemento, y así sucesivamente como se indica en el siguiente diagrama:

$n = 5$:   1   5   10   10   5   1

$n = 6$: 1   6   15   20   15   6   1

Veamos si se puede determinar el por qué del funcionamiento de este modelo. Para ello, consideremos los renglones para $n = 4$ y $n = 5$:

$n = 4$:   1   4   6   4   1

$n = 5$: 1   5   10   10   5   1

Consideraremos el cuarto elemento del renglón 5 y daremos un ejemplo del por qué es igual a la suma del tercero y cuarto elementos del renglón 4. Es decir, demostraremos que

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

Consideremos nuestro ya conocido conjunto M y el problema de seleccionar diferentes comités de tres miembros. Cada uno de

dichos comités incluirá o excluirá a Beatriz. Primero consideremos que Beatriz *está* incluida. Entonces los otros dos miembros del comité deben seleccionarse de los cuatro miembros restantes de M en $\binom{4}{2}$ formas diferentes. Si Beatriz *no* se incluye en el comité entonces el comité de tres debe seleccionarse entre los cuatro otros miembros de M en $\binom{4}{3}$ formas diferentes. Juntos, $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$, determinan el número total de formas en que puede formarse un comité de tres miembros del conjunto M. Pero dicho número está dado por $\binom{5}{3}$, lo cual ilustra la relación que habíamos enunciado y que pretendíamos demostrar. Dicha relación y, en general,

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

puede demostrarse formalmente por medio de la fórmula para ${}_nC_r$. (Ejercicio 20.)

El triángulo de Pascal puede utilizarse de un modo mecánico en el cálculo de probabilidades, como sigue:

Los elementos del segundo renglón son los numeradores para las probabilidades cuando se echan dos monedas; los elementos del tercer renglón son los numeradores cuando se echan tres monedas; y así sucesivamente. El denominador en cada caso se determina como la suma de los elementos del renglón que se está utilizando. Por ejemplo, cuando se echan tres monedas, nos referimos al tercer renglón (1, 3, 3, 1). La suma es 8. Las probabilidades de 0, 1, 2 y 3 caras están dadas por 1/8, 3/8, 3/8, 1/8, como en §8-5.

Obsérvese que la suma de los elementos del segundo renglón es 4, la suma en el tercer renglón es 2^3 u 8, la suma en el cuarto renglón es 2^4 o 16, y, en general, la suma en el n-esimo renglón será 2^n.

EJEMPLO: Aplíquese el cuarto renglón del triángulo de Pascal para determinar la probabilidad de obtener 0, 1, 2, 3, 4 caras al echar una vez cuatro monedas.

Solución: Los numeradores de las fracciones para las probabilidades son los elementos

$$1, \quad 4, \quad 6, \quad 4, \quad 1$$

del cuarto renglón del triángulo de Pascal. Los denominadores son en cada caso 16; es decir, 2^4, teniéndose

$$2^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1.$$

Se tiene entonces

Number of heads	0	1	2	3	4
Probability	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Dichas probabilidades se pueden comprobar al igual que en §8-5. El método puede aplicarse también para número de cruces.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 8-8

En los Ejercicios del 1 al 10 aplíquese el triángulo de Pascal para determinar la probabilidad, al echar una vez cinco monedas, de que se obtengan:

1. 0 caras.
2. 1 cara.
3. 2 caras.
4. 3 caras.
5. 4 caras.
6. 5 caras.
7. 1 cruz.
8. 3 cruces.
9. Al menos 2 cruces.
10. Más de 2 cruces.

11. Hacer un triángulo de Pascal para $m = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

12. Expresar los elementos del undécimo renglón del triángulo de Pascal, utilizando la notación

$$\binom{n}{r}$$

13. Repetir el Ejercicio 12 para el duodécimo renglón.

14. Hacer una tabla con las probabilidades para todos los posibles sucesos de caras cuando se echan 6 monedas.

15. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos cuatro caras al echar una vez: **(a)** 6 monedas? **(b)** 7 monedas?

16. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos tres caras al echar una vez: **(a)** 7 monedas? **(b)** 10 monedas?

17. ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de tres caras al echar una vez **(a)** 6 monedas? **(b)** 8 monedas?

*18. El triángulo de Pascal puede utilizarse para determinar los coeficientes del desarrollo del binomio $(a + b)^n$. Por ejemplo,

$$(a + b)^4 = \underline{1}a^4 + \underline{4}a^3b + \underline{6}a^2b^2 + \underline{4}ab^3 + \underline{1}b^4.$$

Obsérvese el modelo anterior para las variables a y b, y utilizando los resultados del Ejercicio 11 desarróllese el binomio $(a + b)^6$.

*19. Repítase el Ejercicio 18 para $(a + b)^7$.

*20. Utilizando la definición $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ demostrar que

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}.$$

EXAMEN RELATIVO AL CAPITULO 8

1. Calcular: **(a)** ${}_8P_2$; **(b)** ${}_9C_3$.

2. Un florista tiene 5 géneros diferentes de rosas. ¿De cuántas formas pueden seleccionarse 3 géneros diferentes?

3. Siete personas solicitan dos puestos en una tienda. ¿De cuántas formas pueden cubrirse esas plazas?

4. Un hombre tiene una moneda de 5 ¢ una de 10¢, una de 25¢ y una de 50¢. ¿De cuántas formas diferentes puede sacar dos monedas?

5. Constrúyase un espacio muestral que represente los posibles sucesos descritos en el Ejercicio 4 y determínese la probabilidad de que al sacar las dos monedas al azar se obtengan al menos treinta centavos.

6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga, al echar una vez un par de dados: **(a)** un 7? **(b)** un número mayor que 7?

7. ¿Cuál es la apuesta a favor de que salga un as al sacar una carta de una baraja de 52?

8. ¿Cuál es la esperanza matemática al comprarse 3 billetes de un total de 6 000 para una lotería cuyo premio es de $1 000?

9. Un sombrero contiene 3 tarjetas etiquetadas con a, e y t respectivamente. Si se sacan las tarjetas una a una, ¿cuál es la probabilidad de que aparezcan en el orden e, a, t?

10. Una discoteca dispone de 25 discos. ¿De cuántas formas se puede: **(a)** seleccionar 5 discos para utilizarlos en un programa? **(b)** ordenar un programa con 5 discos?

Capítulo 9

CONCEPTOS DE LOGICA

Consciente o inconscientemente, toda persona toma muchas decisiones. Muchas de estas decisiones se basan en el razonamiento. La satisfacción que proporciona una decisión depende con frecuencia de la validez del razonamiento y por lo tanto de conceptos lógicos. En este sentido, el conocimiento de los conceptos lógicos puede mejorar las condiciones para encontrar el género de vida que se quiere y gozar el género de vida que se encuentra.

El razonamiento se basa en el manejo de hechos, por lo general, en forma de proposiciones. Se puede considerar el razonamiento como un "álgebra" de proposiciones con las operaciones de conjunción, disyunción, negación e implicación que se consideraron en el Capítulo 4. En este capítulo se analizarán los valores verdaderos de las proposiciones a fin de establecer relaciones entre ellos.

Algunas de estas relaciones serán la base para el análisis de los argumentos válidos, del razonamiento lógico y de las demostraciones. Se aprenderá a reconocer diferentes formas de enunciar en lengua castellana una misma proposición. Muchas personas consideran que vale la pena estudiar los conceptos lógicos por el solo fin de mejorar el conocimiento del idioma.

9-1 CUANTIFICADORES UNIVERSALES

Muchas proposiciones pueden clasificarse como verdaderas o falsas dándoseles el nombre de **proposiciones decidibles.** Por ejemplo,

$$2 \times 3 = 5$$

es una proposición falsa;

$$2 + 3 = 5$$

es una proposición verdadera. En general, cualquier *proposición aritmética* es una proposición decidible.

Una proposición en la que interviene una variable puede considerarse como una **proposición algebraica.** Los siguientes son ejemplos de proposiciones algebraicas:

$$x + 1 = 1 + x$$
$$x + 1 \neq x$$
$$x + 2 = 5$$

¿Son decidibles esas proposiciones algebraicas? La primera proposición la consideramos verdadera dado que $x + 1 = 1 + x$ para todo número real x. Los lógicos incluyen con la proposición el *cuantificador* "para todo número real x" antes de considerar decidible la proposición. Consideremos las proposiciones:

Para todo número real x, $x + 1 = 1 + x$
Para todo número real x, $x + 1 \neq x$
Para todo número real x, $x + 2 = 5$.

Cada una de las proposiciones es decidible. Las dos primeras son verdaderas; la tercera es falsa. La necesidad del cuantificador para la segunda proposición puede admitirse, recordando de la Sección 5-1 que

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

El cuantificador "para todo número real x" identifica el conjunto universal (en este caso el conjunto de los números reales) que tiene que considerarse para los valores de x. Cualquier cuantificador de la forma

Para todo ________,

o equivalente a dicha forma recibe el nombre de **cuantificador universal.**

Utilizamos cuantificadores universales cuando decimos

Para todo entero n, $n = \frac{n}{1}$.
Para todo entero n, n es un número racional.
Todo entero es un número racional.
Para todos los ángulos rectos A y B, $\angle A \cong \angle B$.
Dos ángulos rectos *cualesquiera* son congruentes.
Todos los ángulos rectos son congruentes.
Para todos los números reales x y x, $x + y = y + x$.

Es frecuente afirmar que las proposiciones son universalmente verdaderas por medio de proposiciones de la forma:

Para todo x, ________.
Todo x es ________.
Para todo x y todo y, ________.
Dos cualesquiera x y y son ________.
Todos los x y todos los y son ________.

Cada uno de estos cuantificadores universales puede considerarse en una de las dos siguientes formas:

Para todo x.
Para todo x y todo y.

Dichos cuantificadores pueden representarse simbólicamente como sigue:

$\forall_x$ léase: "Para todo x"
$\forall_x\forall_y$ léase: "Para todo x y todo y".

Cuando es necesario especificar el conjunto universal, el cuantificador universal se escribe en la forma

$\forall_x$, x número real, ________.

EJEMPLO 1: Dar un símbolo apropiado que identifique el cuantificador universal de cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Para todo número real x, $x \times 1 = x$.
(b) Todos los cuadrados son rectángulos.
(c) Todo entero es número real.

Solución: (a) $\forall_x$, x número real; (b) $\forall_x$, x cuadrado; (c) $\forall_x$, x entero.

Consideremos la proposición:

Si $x = 2$, entonces $x + 3 = 5$.

Esta proposición parece tener en su estructura su propio cuantificador para x, dado que la variable x es simplemente otro nombre para el número 2. En este sentido, la variable x no es una **variable libre.** La variable x es libre en cada una de las siguientes proposiciones que no son decidibles:

$$x + 2 = 5$$
$$x < 1$$
$$x \neq 7$$

Una variable no es libre cuando tiene asignado un valor, como en la proposición

Si $x = 2$, entonces $x + 3 = 5$.

Una variable no es libre cuando está restringida por un cuantificador universal, como en la proposición

$\forall_x$, x número real, $x + 3 = 5$.

Por otra parte, una variable no es libre cuando está restringida por un *cuantificador existencial* (§9-2), como en la proposición

Existe un valor real de x tal que $x + 3 = 5$.

Consideramos, como en el estudio formal de la lógica, que:

Toda proposición en la que intervenga una variable libre no es decidible.
Toda proposición en la que no intervengan variables libres es decidible.

En una proposición se puede restringir una variable libre y por consiguiente hacer decidible la proposición en una de las tres siguientes formas:

Asignando un valor a la variable.
Utilizando un cuantificador universal.
Utilizando un cuantificador existencial (§9-2).

~~~~~~

EJEMPLO 2: Hacer la proposición falsa (por consiguiente decidible)asignando un valor a la variable libre:

(a) $x^2 + 1 = 10$; (b) $m(\angle A) = 90$ y $\angle A \cong \angle B$.

Solución: (a) $x = 5$; cualquier valor diferente de 3 y -3 puede utilizarse para hacer la proposición falsa. (b) $\angle B$ es un ángulo llano; pueden utilizarse otros procedimientos para afirmar que B no es un ángulo recto. Obsérvese que A no es una variable libre.

EJEMPLO 3: Utilizar cuantificadores universales para hacer las siguientes proposiciones decidibles para las variables reales x, y y z:

(a) $x + 2 = 5$; (b) $x(y + z) = xy + xz$.

Solución: (a) $\forall_x: x + 2 = 5$; (b) $\forall_x\forall_y\forall_z: x(y + z) = xy + xz$.

~~~~~~

En el Ejemplo 3 (a) la proposición dada $x + 2 = 5$ es verdadera si $x = 3$ y falsa si $x \neq 3$; es decir, la proposición como origi-

nalmente se enuncia no es ni verdadera ni falsa. La proposición $\forall_x$: $x + 2 = 5$ es falsa para la variable real x, dado que puede determinarse un **contra ejemplo** (un ejemplo para el que la proposición es falsa); por ejemplo,

$$\text{Si } x = 5, \text{ entonces } x + 2 \neq 5.$$

Puede utilizarse cualquier valor para x diferente de 3 para obtener un contra ejemplo para la proposición $\forall_x$: $x + 2 = 5$. Cualquier proposición para la cual puede encontrarse al menos un contra ejemplo, es falsa.

EJEMPLO 4: Para una variable real x, identificar como verdadera o falsa.

(a) $\forall_x$: $x + 2 = 2 + x$; (b) $\forall_x$: $x - 2 = 2 - x$.

Solución: (a) Verdadera por la propiedad conmutativa de la adición; (b) falsa, dado que para $x = 1$ la proposición $1 - 2 = 2 - 1$ es falsa.

Obsérvese en el Ejemplo 4 (b) que un simple ejemplo como $x = 2$ para el cual la proposición es verdadera, $2 - 2 = 2 - 2$, no es suficiente para demostrar que una proposición universal sea verdadera.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 9-1

Dar un símbolo apropiado que identifique el cuantificador universal de cada una de las siguientes proposiciones:

1. Para todo número real x, $x + 1 = 1 + x$.

2. Para todo entero y, $y - 1 = 1 - y$.

3. Para todo entero t, $[t] = t$.

4. Todos los enteros son números reales.

5. Todo número real es número complejo.

6. Todo rectángulo es paralelogramo.

7. Todos los triángulos son polígonos.

8. Todo número par es divisible entre 2.

9. Toda casa es un edificio.

10. Los triángulos son figuras planas.

11. Si x es entero, entonces x es par.

12. Si x es un número racional, entonces x es un número entero.

Asignar un valor a la variable que haga la proposición (a) verdadera; (b) falsa:

13. $x - 2 = 7$ **14.** $2x + 3 = 15$

15. $2 - 3x = 20$ **16.** $5 - 2x = 35$

Utilizar cuantificadores universales que hagan decidibles las siguientes proposiciones para las variables reales x, y y z:

17. $x + 2y = 2x + y$ **18.** $2x + 6 = 2(x + 3)$

19. $x + yz = (x + y)z$ **20.** $xy + yz = y(x + z)$

Para una variable real x, identificar como verdadera o falsa cada una de las siguientes proposiciones:

21. $\forall_x\colon\ x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

22. $\forall_x\colon\ x(1 - x) = x - x^2$

23. $\forall_x\colon\ x^x \neq 1$ **24.** $\forall_x\colon\ x^x \neq 4$

25. $\forall_x\colon\ \frac{x}{x} = 1$ **26.** $\forall_x\colon\ \frac{2x - 2}{x - 1} = 2$

9-2 CUANTIFICADORES EXISTENCIALES

Hay diversas formas en las que se puede afirmar la existencia de

un valor al menos para la variable real x en la proposición $x^2 < 5$. Por ejemplo, podemos decir:

Existe un número real x tal que $x^2 < 5$.
Existe al menos un número real x tal que $x^2 < 5$.
$x^2 < 5$ para algún número real x.

Cada una de estas proposiciones puede escribirse en la forma

$$\exists_x,\ x \text{ número real: } x^2 < 5.$$

Siendo x número real puede escribirse simplemente

$$\exists_x: \quad x^2 < 5.$$

El **cuantificador existencial** $\exists_x$ significa que: "existe al menos un x tal que".

EJEMPLO 1: Utilizar cuantificadores existenciales que hagan verdaderas las siguientes proposiciones para variables reales x, y y z:

(a) $2x + 3 = 17$; (b) $x^2 - 1 \neq 8$;
(c) $x + y = y - x$; (d) $x^2 = xyz$.

Solución: (a) $\exists_x$: $2x + 3 = 17$; (b) $\exists_x$: $x^2 - 1 \neq 8$; (c) $\exists_x\exists_y$: $x + y = y - x$; (d) $\exists_x\exists_y\exists_z$: $x^2 = xyz$.

La proposición (a) es verdadera para $x = 7$. La elección de valores para los que las otras proposiciones son verdaderas se puede hacer de varias formas. Por ejemplo, considérese para (b) $x = 2$; para (c) $x = 0$ y $y = 5$; para (d) $x = 6$, $y = 2$ y $z = 3$.

EJEMPLO 2: Dar un símbolo apropiado para el cuantificador existencial en cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Existen enteros positivos mayores que 7.

(b) La ecuación $x^3 + 7x^2 + x = 9$ tiene una solución entera.

Solución: (a) $\exists_x$, x entero positivo.
(b) $\exists_x$, x entero.

La estrecha relación entre los cuantificadores existenciales y los cuantificadores universales resulta evidente al considerarse negaciones de proposiciones. Como en la Sección 4-7, utilizaremos $\sim p$ para representar la negación de cualquier proposición p.

Si p es verdadera, entonces $\sim p$ es falsa; si p es falsa, entonces $\sim p$ es verdadera. Consideremos las siguientes proposiciones:

p: Todos los triángulos son isósceles.
$\sim p$: No todos los triángulos son isósceles; es decir, existen triángulos que no son isósceles.
q: Existe un mortal que no vive en la Tierra.
$\sim q$: No es verdad que exista un mortal que no vive en la Tierra; es decir, todos los mortales viven en la Tierra.

Obsérvese que la proposición p tiene la forma $\forall_x$: r y la negación de p tiene la forma $\exists_x$: $\sim r$; la proposición q tiene la forma $\exists_x$: s, y la negación de q tiene la forma $\forall_x$: $\sim s$. En general, la negación de cualquier proposición de la forma

$\forall_x$: r (para todo x)

es la proposición correspondiente

$\exists_x$: $\sim r$ (existe al menos una x tal que);

la negación de cualquier proposición de la forma

$\exists_x$: s (existe al menos una x tal que)

es la proposición correspondiente

$\forall_x$: $\sim s$ (para todo x).

EJEMPLO 3: Enunciar en palabras la negación de cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Existe un rectángulo que no es cuadrado.
(b) Todos los triángulos son triángulos rectángulos.

Solución: (a) Todos los rectángulos son cuadrados. (b) Existe un triángulo que no es triángulo rectángulo.

EJEMPLO 4: Enunciar en símbolos la negación de cada una de las siguientes proposiciones:

(a) $\forall_x$: $x^2 > 1$; (b) $\exists_x$: $x = |x|$.

Solución: (a) $\exists_x$: $x^2 \leq 1$; (b) $\forall_x$: $x \neq |x|$.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 9-2

Dar un símbolo apropiado para el cuantificador existencial en cada una de las siguientes proposiciones:

1. Existe un número no negativo.
2. Existen números negativos.
3. La ecuación $x - 5 = 7$ tiene una solución entera.
4. La ecuación $x^3 = -8$ tiene una solución entera.
5. Algunos números reales son positivos.
6. Algunos números reales son negativos.
7. Existe al menos un número real que no es ni positivo ni negativo.
8. La ecuación $x^{31} - 17 = 0$ tiene al menos una raíz real.

Utilizar un cuantificador existencial que haga verdadera cada una de las siguientes proposiciones para la variable real x:

9. $2x - 5 = 11$
10. $2 - x = 8 + x$
11. $x^2 - x - 6 = 0$
12. $x^2 - 75 = 0$

Enunciar en palabras la negación de cada una de las siguientes proposiciones:

13. Todas las manzanas son frutas.

14. Todos los números son números reales.

15. Todo número natural es positivo.

16. Toda fracción representa un número racional.

17. Existen números racionales que no son enteros.

18. Existen números reales que no son números racionales.

19. Algunos números complejos son números reales.

20. Algunos números racionales son enteros.

En los Ejercicios del 21 al 24 enunciar en símbolos la negación de cada una de las proposiciones dadas:

21. $\forall_x$: $x = 2$ **22.** $\exists_x$: $x + 1 = 1 + x$

23. $\exists_x$: $x^2 \leq 0$ **24.** $\forall_x$: $x + 1 = 1 + x$

25. Existen también símbolos para especificar el número exacto de valores x que existen para una proposición dada. Por ejemplo, para una variable real x podemos escribir:

$\exists_{1x}$: $x + 2 = 5$. Existe un solo valor de x tal que $x + 2 = 5$.
$\exists_{2x}$: $x^2 = 7$. Existen dos únicos valores de x tales que $x^2 = 7$.

Identificar como verdadera o falsa cada una de las siguientes proposiciones para la variable real x:

(a) $\exists_{1x}$: $x^2 = 9$ **(b)** $\exists_{2x}$: $x^2 = 1$
(c) $\exists_{2x}$: $x^2 = |x|$ **(d)** $\exists_{2x}$: $x = |x|$

9-3 PROPOSICIONES DEPENDIENTES

Para dos proposiciones cualesquiera p y q hay cuatro posibles combinaciones de valores veritativos. Representamos dichas combina-

ciones mediante las siglas VV, VF, FV y FF como se muestra en la siguiente tabla:

	VV	VF	FV	FF
p:	V	V	F	F
q:	V	F	V	F

Dos proposiciones se dice que son **proposiciones independientes** si se presentan para sus valores veritativos las cuatro posibles combinaciones. Dos proposiciones son **proposiciones dependientes** si no son independientes, es decir, si una al menos de las combinaciones de los valores veritativos no se presenta. En la siguiente tabla utilizamos el signo "√" para indicar que la combinación de valores veritativos que se especifica puede ser satisfecha (se presenta) para las proposiciones dadas y utilizamos "×" para indicar que la combinación especificada no se presenta nunca. Se enumeran los ejemplos de suerte que se pueda hacer referencia a ellos como el "Caso 1", el "Caso 2", etc. Los dieciséis casos están ordenados en la misma forma que para una tabla veritativa de cuatro proposiciones. Dos proposiciones cualesquiera determinan un ejemplo de uno de los dieciséis casos. Dos proposiciones son independientes si y sólo si ilustran el Caso 1, como se ve por las cuatro marcas en la tabla siguientes.

	VV	*VF*	*FV*	*VV*	*Ejemplo*
1.	✓	✓	✓	✓	p: Aquí son las ocho de la mañana q: Afuera todo está tranquilo ahora.
2.	✓	✓	✓	×	p: $x^2 = 9$, x real. q: $x \neq 3$, x real.
3.	✓	✓	×	✓	p: Es una fruta cítrica. q: Es una naranja.
4.	✓	✓	×	×	p: $x + 1 = x + 1$. q: $x + 2 = 5$.
5.	✓	×	✓	✓	p: Es una naranja. q: Es una fruta cítrica.
6.	✓	×	✓	×	p: $x + 2 = 5$. q: $x + 1 = x + 1$.

7.	✓	×	×	✓	p: $x = 2$. q: $3x = 6$.
8.	✓	×	×	×	p: $x + 2 \leq x + 2$. q: $x = x$.
9.	×	✓	✓	✓	p: Este coche es un Ford. q: Este coche es un Chevrolet.
10.	×	✓	✓	×	p: Este coche es un Ford. q: Este coche no es un Ford.
11.	×	✓	×	✓	p: $x + 2 = 5$. q: $x + 1 \neq x + 1$.
12.	×	✓	×	×	p: $x + 1 = x + 1$. q: $2x \neq x + x$.
13.	×	×	✓	✓	p: $x + 1 \neq x + 1$. q: $x + 2 = 5$.
14.	×	×	✓	×	p: $2x \neq x + x$. q: $x + 1 = x + 1$.
15.	×	×	×	✓	p: $x + 1 \neq x + 1$. q: $2x \neq x + x$.
16.	×	×	×	×	Imposible.

A medida que se leen los ejemplos se puede observar sin lugar a dudas que:

1. Existen proposiciones t tales como

$$x + 1 = x + 1$$
$$x = x$$
$$2x = x + x$$
$$x + 2 \leq x + 2$$

que son siempre verdaderas, es decir, $\forall_x$: t.

2. Existen proposiciones s tales como

$$x + 1 \neq x + 1$$
$$2x \neq x + x$$

que son siempre falsas; es decir, $\forall_x$: $\sim s$.

3. Existen proposiciones r tales como

Aquí son las ocho de la mañana
Es una naranja
$x + 2 = 5.$

que pueden ser verdaderas o falsas; es decir;

$$(\exists_x: \ r) \wedge (\exists_x: \ \sim r).$$

Se han utilizado diversos ejemplos de proposiciones para ilustrar cada uno de los primeros quince casos de pares de valores veritativos para p y q. La imposibilidad de dar un ejemplo para el caso 16 se debe al hecho de que sólo se consideran proposiciones p y q que son o verdaderas o falsas. Es imposible determinar proposiciones p y q que no sean ni verdaderas ni falsas; es decir, proposiciones tales que no se presente ninguna de las combinaciones de valores veritativos VV, VF, FV o FF.

Dos proposiciones p y q son **proposiciones consistentes** si se presenta la combinación de valores verdaderos, VV (Casos del 1 al 8). Por consiguiente, dos proposiciones independientes cualesquiera son consistentes. También son consistentes dos proposiciones dependientes cualesquiera del género representado en los Casos del 2 al 8.

Dos proposiciones p y q son **proposiciones contrarias** si no son consistentes; es decir, si no se presenta la combinación de valores verdaderos VV (Casos del 9 al 15). Las dos proposiciones son **proposiciones contradictorias** si y sólo si las dos combinaciones VV y FF no se presentan y se presentan las dos combinaciones VF y FV (Caso 10). Por consiguiente dos proposiciones contradictorias cualesquiera son proposiciones contrarias; dos proposiciones contrarias cualesquiera son proposiciones dependientes.

Para los diversos casos mencionados se dan ejemplos de proposiciones independientes, dependientes, consistentes, contrarias y contradictorias. Para determinar si la proposición dada por una pareja es independiente, dependiente, consistente, contraria o contradictoria, se determinan primero las combinaciones de valores veritativos que pueden presentarse y a partir de ellas el caso que las dos proposiciones ilustran.

EJEMPLO: Determinar si las proposiciones dadas son independientes, dependientes, consistentes, contrarias o contradictorias:

p: $x < 5$, x real
q: $x^2 = 36$, x real.

Solución: La combinación de valores veritativos

VV: se presenta si $x = -6$;
VF: se presenta si, por ejemplo, $x = 2$;
FV: se presenta si $x = 6$;
FF: se presenta si, por ejemplo, $x = 7$.

Las proposiciones dadas ilustran el Caso 1 y por consiguiente son independientes, no dependientes, consistentes, no contrarias y no contradictorias.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 9-3

Del 1 al 15. Dar otros tres ejemplos de pares de proposiciones p y q para los Casos del 1 al 15 de las posibles combinaciones de valores veritativos considerados en esta sección.

Identificar las combinaciones de valores veritativos que pueden presentarse y a partir de ellas el caso particular que ilustran cada uno de los siguientes pares de proposiciones:

16. p: El coche es un Buick.
q: El coche no es un Cadillac.

17. p: x es un número positivo.
q: x es un número negativo.

18. p: $x < 7$.
q: $x \geq 7$.

19. p: $x < 6$.
q: $x = 7$.

20. p: $x^2 = 25$.
q: $x \neq 5$.

21. p: $x \neq x + 1$.
q: $x^2 > 0$.

Identificar los pares de proposiciones en los Ejercicios del 16 al 21 que son:

22. Independientes.
23. Dependientes.
24. Consistentes.
25. Contrarias.
26. Contradictorias.

9-4 PROPOSICIONES EQUIVALENTES

Dos proposiciones son **proposiciones equivalentes** si son ambas verdaderas o ambas falsas como en el Caso 7 de la Sección 9-3. Si p y q son proposiciones equivalentes, se escribe

$$p \leftrightarrow q \quad \text{léase: ``} p \text{ es equivalente a } q\text{''.}$$

Obsérvese que dos proposiciones p y q son contradictorias (Sección 9-3) si y sólo si $p \leftrightarrow (\sim q)$.

EJEMPLO 1: Demostrar por medio de una tabla veritativa que

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim q) \rightarrow (\sim p)]$$

Solución:

p	q	$[p \rightarrow q]$	$\leftrightarrow$	$[(\sim q)$	$\rightarrow$	$(\sim p)]$
T	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T
		(a)	(e)	(b)	(d)	(c)

La equivalencia se cumple siempre según se ve en la columna (e).

En los Ejercicios del 1 al 4 se consideran los siguientes pares de proposiciones equivalentes (véase en la Sección 4-7 el significado de los símbolos que se emplean):

1. $\sim(p \wedge q)$ y $(\sim p) \vee (\sim q)$
2. $\sim(p \vee q)$ y $(\sim p) \wedge (\sim q)$
3. $p \to q$ y $q \vee (\sim p)$
4. $(\sim p) \to (\sim q)$ y $q \to p$

De estos pares de proposiciones equivalentes, los dos primeros corresponden a propiedades de los conjuntos y sus complementos, a saber

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

dándoseles el nombre de *leyes de De Morgan para las proposiciones.* El tercer par de proposiciones equivalentes nos permite sustituir cualquier proposición de implicación por una disyunción.

EJEMPLO 2: Enunciar en forma de disyunción:

Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles.

Solución: Un triángulo o bien es isósceles o no equilátero.

Cada proposición $p \to q$ tiene una **proposición recíproca** $q \to p$; una **proposición inversa** $(\sim p) \to (\sim q)$ y una **proposición contrapositiva** $(\sim q) \to (\sim p)$. Es frecuente presentar dichas proposiciones dependientes en el siguiente orden:

Proposición:	$p \to q$
Recíproca:	$q \to p$
Inversa:	$(\sim p) \to (\sim q)$
Contrapositiva:	$(\sim q) \to (\sim p)$

La proposición demostrada en el Ejemplo 1 puede ahora expresarse en la forma:

Cualquier proposición de implicación es equivalente a su contrapositiva. En forma análoga, la equivalencia a demostrar en el Ejercicio 4 puede expresarse en la forma:

La inversa de cualquier proposición de implicación dada es equivalente a la recíproca de la proposición dada.

A continuación se dan cinco ejemplos de proposiciones de implicación con sus recíprocas, inversas y contrapositivas:

1. *Proposición:* Si está nevando, dejo el coche en el garaje.
   Recíproca: Si dejo el coche en el garaje, está nevando.
   Inversa: Si no está nevando, no dejo el coche en el garaje.
   Contrapositiva: Si no dejo el coche en el garaje, no está nevando

2. *Proposición:* Si $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.
   Recíproca: Si $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.
   Inversa: Si $\triangle ABC$ no es congruente al $\triangle XYZ$, entonces $\triangle ABC$ no es semejante al $\triangle XYZ$.
   Contrapositiva: Si $\triangle ABC$ no es semejante al $\triangle XYZ$, entonces $\triangle ABC$ no es congruente a $\triangle XYZ$.

3. *Proposición:* Si x es negativo, entonces $x \neq 0$.
   Recíproca: Si $x \neq 0$, entonces x es negativo.
   Inversa: Si x no es negativo, entonces $x = 0$.
   Contrapositiva: Si $x = 0$, entonces x no es negativo.

4. *Proposición:* Si $x + 2 = 5$, entonces $x = 3$.
   Recíproca: Si $x = 3$, entonces $x + 2 = 5$.
   Inversa: Si $x + 2 \neq 5$, entonces $x \neq 3$.
   Contrapositiva: Si $x \neq 3$, entonces $x + 2 \neq 5$.

5. *Proposición:* $p \to (\sim q)$.
   Recíproca: $(\sim q) \to p$.
   Inversa: $(\sim p) \to \sim(\sim q)$, que puede simplificarse de la forma $(\sim p) \to q$.

Contrapositiva: $\sim(\sim q) \rightarrow (\sim p)$, o simplemente $q \rightarrow (\sim p)$.

Las siguientes tablas veritativas para estas variantes de una proposición condicional $p \rightarrow q$ resumen el análisis anterior y definen los valores veritativos para cada proposición:

		proposición	recíproca	inversa	contrapositiva
p	q	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$(\sim p) \rightarrow (\sim q)$	$(\sim q) \rightarrow (\sim p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 9-4

Demostrar por medio de tablas veritativas que las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\sim(p \wedge q)$ y $(\sim p) \vee (\sim q)$.
2. $\sim(p \vee q)$ y $(\sim p) \wedge (\sim q)$.
3. $p \rightarrow q$ y $q \vee (\sim p)$.
4. $(\sim p) \rightarrow (\sim q)$ y $q \rightarrow p$.

Escríbanse la recíproca, la inversa y la contrapositiva de cada una de las siguientes proposiciones:

5. Si estamos en condiciones de hacerlo, entonces compraremos un coche nuevo.

6. Si jugamos ping-pong, entonces usted ganará el juego.

7. Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo que comprenden, entonces los triángulos son congruentes.

8. Si $x > 2$, entonces $x \neq 0$.

9. Si $x(x-1)=0$, entonces $x=1$.

10. $(\sim p) \rightarrow q$.

Los ejercicios 11, 12, 13 y 14 se refieren a las proposiciones dadas en los Ejercicios 7, 8 y 9. Dígase si se aceptan como universalmente válidas:

11. La proposición dada.

12. La recíproca de la proposición dada.

13. La inversa de la proposición dada.

14. La contrapositiva de la proposición dada.

9-5 FORMAS DE PROPOSICIONES

Dos proposiciones equivalentes cualesquiera (§9-4) pueden considerarse como diferentes formas de la misma proposición. El reconocer las diferentes formas de una proposición es particularmente útil cuando se están considerando proposiciones de implicación (proposiciones condicionales, §4-8). Es frecuente el empleo de las palabras *necesario* y *suficiente* en las proposiciones condicionales. Por ejemplo, consideremos la proposición:

Trabajando con empeño es condición suficiente para pasar el examen. Representemos con p "trabajar con empeño" y con q "pasar el examen".

Se necesita establecer si la proposición dada significa "si p, entonces q" o "si q, entonces p". La palabra suficiente puede interpretarse en el sentido de que trabajar con empeño es lo adecuado —pero no necesario— para pasar. Es decir, puede haber otros modos de pasar el examen, pero trabajando con empeño se consigue. Así pues, interpretamos la proposición como:

Si trabaja con empeño, entonces pasará el examen.

La proposición simbólica $p \rightarrow q$ puede entonces utilizarse para cada una de estas proposiciones:

Si p, entonces q.
p es condición suficiente para q.

Consideremos ahora la proposición:

Trabajar con empeño es una condición necesaria para pasar el examen.

En ella se expresa que trabajar con empeño es necesario o esencial a fin de pasar. Es decir, independientemente de lo que se haga habrá que trabajar con empeño si se quiere pasar. Sin embargo, no se asegura que con el solo hecho de trabajar con empeño se logre el pase. Es necesario, pero no suficiente. (Posiblemente haga falta también obtener buenas calificaciones.) Por consiguiente se interpreta la proposición con el siguiente significado:

Si pasa el examen, entonces ha trabajado con empeño.

La proposición simbólica $q \rightarrow p$ puede entonces utilizarse para cada una de estas proposiciones:

Si q, entonces p.
p es una condición necesaria para q.

Otra forma más que hay que considerar es la proposición "q, sólo si p". El ejemplo utilizado en esta sección puede escribirse de la siguiente forma:

Pasará el examen sólo si trabaja con empeño.

Obsérvese que *no* dice que el trabajar con empeño asegura el pase. Significa que si pasa el examen, entonces ha trabajado con empeño. Es decir, "q sólo si p" es equivalente a la proposición "si q, entonces p".

También lo podemos interpretar de otra forma. La proposición "q, sólo si p" significa "si no p, entonces no q". La contrapositiva de esta última proposición es, sin embargo, "si q, entonces p". En términos del ejemplo esto significa que si no trabaja con empeño, entonces no pasará. Por consiguiente, si pasa el examen, entonces ha trabajado con empeño.

Resumiendo el análisis hasta aquí, cada una de las siguientes proposiciones representa una forma equivalente de escribir la proposición $p \rightarrow q$:

Si p, entonces q.
q, si p.
p implica q.
q es implicada por p.
p es condición suficiente para q.

q es condición necesaria para p.
p, sólo si q.

La última forma es probablemente la más difícil de usar. Debe parecer razonable que, al considerársela como una nueva forma de enunciar el hecho de que si $p \rightarrow q$, es imposible tener p sin tener q.

Las siete formas de enunciar que una proposición p implica una proposición q ilustran la dificultad que puede ofrecer la comprensión de la lengua castellana. Procuraremos evitar la confusión considerando las proposiciones de implicación en la forma.

$$p \rightarrow q$$

cuando se enuncien en símbolos, y en la forma

Si p, entonces q

cuando se enuncien en palabras.

EJEMPLO 1: Escribir cada una de las siguientes proposiciones en la forma si-entonces:

(a) Los ángulos rectos son congruentes.
(b) $x > 5$, sólo si $x \geq 0$.

Solución: (a) Si dos ángulos son rectos, entonces son congruentes. (b) Si $x > 5$, entonces $x \geq 0$.

EJEMPLO 2: Traducir a forma simbólica, considerando

p: Trabajaré con empeño.
q: Obtendré sobresaliente.

(a) Obtendré sobresaliente si trabajo con empeño.
(b) Trabajar con empeño es una condición suficiente para obtener sobresaliente.
(c) Si trabajo con empeño entonces obtendré sobresaliente y si obtengo sobresaliente entonces he trabajado con empeño.

Solución: (a) $q \rightarrow p$; (b) $p \rightarrow q$, (c) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

La proposición $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ del Ejemplo 2 (c) es una forma de enunciar que p y q son equivalentes, $p \leftrightarrow q$. A una proposición de implicación se le da también el nombre de proposición condicional (§4-8) ; a una proposición de la equivalencia de dos proposiciones se le da el entonces nombre de **proposición bicondicional.** El símbolo $\leftrightarrow$ se utiliza como **símbolo bicondicional** o **símbolo de equivalencia.**

Cualquier proposición bicondicional

$$p \leftrightarrow q$$

es una proposición en la que p es una condición suficiente para q y también p es una condición necesaria para q. Podemos resumir lo anterior diciendo que p es una **condición necesaria y suficiente** para q. La proposición bicondicional puede enunciarse en una cualquiera de las siguientes formas:

p si y sólo si q.
p implica y es implicada por q.
p es una condición necesaria y suficiente para q.

EJEMPLO 3: Constrúyase una tabla veritativa para la proposición:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

Solución:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T
		(a)	(c)	(b)

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

En el Ejemplo 3 hemos determinado una tabla veritativa para la proposición $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Sin embargo, habíamos acordado previamente que dicha conjunción de proposiciones es equivalente a $p \leftrightarrow q$. Eso nos permite definir una tabla veritativa para $p \leftrightarrow q$ como se indica arriba.

En la tabla veritativa vemos que $p \leftrightarrow q$ es verdadera cuando p y q son ambas verdaderas o ambas falsas. Así pues, cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas:

$2 \times 2 = 4$ si y sólo si $7 - 5 = 2$ (Ambas partes son verdaderas)
$2 \times 2 = 5$ si y sólo si $7 - 5 = 3$ (Ambas partes son falsas)

Cada una de las siguientes proposiciones es falsa ya que es falsa una parte de cada una de ellas:

$2 \times 2 = 4$ si y sólo si $7 - 5 = 3$.
$2 \times 2 = 5$ si y sólo si $7 - 5 = 2$.

Como lo habíamos observado previamente, utilizamos el símbolo "$\leftrightarrow$" para hacer ver que dos proposiciones son equivalentes. Consideremos las siguientes proposiciones:

p: Esta tarde corto el césped.
q: El sol brilla.

Entonces la proposición "$p \leftrightarrow q$", es decir, p si y sólo si q, es verdadera en los dos siguientes casos:

1. Si corto el césped y el sol brilla.
2. Si no corto el césped y el sol no brilla.

En todos los demás casos, la proposición "$p \leftrightarrow q$" es falsa. Resumiendo, dos proposiciones "p" y "q" son equivalentes si cada una de ellas implica la otra; dicho de otra forma, podemos escribir "$p \leftrightarrow q$" si es verdad que $p \rightarrow q$ y también que $q \rightarrow p$.

EJEMPLO 4: ¿Bajo qué condiciones es verdadera la siguiente proposición?

Obtendré sobresaliente si y sólo si trabajo con empeño.

Solución: La proposición es verdadera en los dos siguientes casos:

(a) Obtiene sobresaliente y trabaja con empeño.
(b) No obtiene sobresaliente y no trabaja con empeño.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 9-5

Escribir cada una de las siguientes proposiciones en la forma si-entonces:

1. Todos los patos son pájaros.

2. Los ángulos rectos son congruentes.

3. Los complementos del mismo ángulo son congruentes.

4. Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.

5. Dos rectas paralelas cualesquiera son coplanares.

6. Todos los triángulos son polígonos.

7. Todos los círculos son redondos.

8. Todos los libros de matemáticas son aburridos.

9. Todos los maestros son tediosos

10. Todas las p son q.

11. Le gustará este libro sólo si le gustan las matemáticas.

12. Una condición necesaria para que le guste este libro es que le gusten las matemáticas.

13. Para que le guste este libro es suficiente que le gusten las matemáticas.

14. Una condición suficiente para que le guste este libro es que le gusten las matemáticas.

15. Que le guste este libro es una condición necesaria para que le gusten las matemáticas.

Escribir cada una de las siguientes proposiciones en forma simbólica, considerando:

p: El sol brilla.
q: Corto el césped.

16. Si el sol brilla, entonces corto el césped.

17. Cortaré el césped sólo si el sol brilla.

18. Si el sol no brilla, entonces no cortaré el césped.

19. Que el sol brille es una condición necesaria para que corte el césped.

20. Corto el césped si y sólo si el sol brilla.

21. Si el sol brilla entonces no corto el césped.

22. Para que corte el césped es suficiente que el sol brille.

23. Una condición necesaria y suficiente para que corte el césped es que el sol brille.

Escribir cada una de las siguientes proposiciones en forma simbólica, considerando:

p: No desayuno.
q: Me levanto tarde.

24. No desayuno si y sólo si me levanto tarde.

25. Una condición necesaria para que no desayune es que me levante tarde.

26. Para que no desayune es suficiente que me levante tarde.

27. Una condición necesaria y suficiente para que no desayune es que me levante tarde.

28. Para que desayune es necesario que no me levante tarde.

Escribir cada una de las siguientes proposiciones en la forma si-entonces, e identificar cada una de ellas como verdadera o falsa:

29. $11 - 3 > 8$ si $9 + 3 < 10$.

30. Una condición necesaria para que 2×2 sea igual a 5 es que $8 - 5 = 3$.

31. Para que 7×4 sea igual a 25 es suficiente que $5 + 3 = 8$.

32. $7 \times 6 = 40$ sólo si $8 \times 5 \neq 40$.

33. $7 \times 6 = 42$ sólo si $8 \times 5 \neq 40$.

Con relación a las dos siguientes proposiciones determínese si se le puede acusar de no cumplir el compromiso a un joven que las hace, recibe el dinero y no se casa con la muchacha:

34. Me casaré con su hija sólo si usted me da $10,000.

35. Una condición suficiente para que me case con su hija es que usted me dé $10 000.

9-6 NATURALEZA DE LA DEMOSTRACION

¿Cómo se puede "demostrar" una proposición a un amigo? Se puede hacer de diferentes formas, incluyendo las tres que siguen:

1. Buscando la proposición en una enciclopedia o en cualquier otra referencia que el amigo esté dispuesto a aceptar sin más.
2. Demostrándole que la proposición es una consecuencia necesaria de otras proposiciones previamente aceptadas.
3. Demostrándole que la proposición no puede ser falsa.

En matemáticas también existen diversas formas de "demostrar" proposiciones. En esencia toda demostración se basa en lo siguiente:

1. Proposiciones que se aceptan como verdaderas (supuestos).
2. Secuencias de proposiciones (argumentos) tales que cada una de las proposiciones o bien es supuesta o es una *consecuencia*

lógica de las proposiciones precedentes, incluyendo en la secuencia la proposición a demostrar.

3. Demostraciones de que las proposiciones no pueden ser falsas.

Así pues, la "llave" para comprender lo que es una demostración está en penetrar en el concepto de "consecuencias lógicas". Veremos en la Sección 9-7 que cada consecuencia lógica de una proposición no sólo depende de la proposición dada, sino también de una o más proposiciones que no pueden dejar de ser verdaderas. Una proposición como $p \vee (\sim p)$ que siempre es verdadera recibe el nombre de **tautología.**

EJEMPLO: Determinar si la proposición

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

es una tautología.

Solución:

p	q	$[(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$p]$	$\rightarrow$	q
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	T	F
		(a)	(c)	(b)	(e)	(d)

Bajo todas las posibles situaciones, el valor veritativo de la proposición dada es V, según se ve en la columna (e); por consiguiente es una tautología.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 9-6

Determinar si cada una de las siguientes proposiciones es una tautología:

1. $p \vee (\sim p)$
2. $\sim[p \wedge (\sim p)]$
3. $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow (\sim p)$
4. $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
5. $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p)] \rightarrow (\sim q)$
6. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
7. $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \rightarrow q$
8. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
9. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

9-7 RAZONAMIENTOS VALIDOS

Consideraremos las demostraciones en términos de los modelos (razonamientos) formados por las proposiciones utilizadas. Las proposiciones supuestas son las **proposiciones dadas** y reciben el nombre de **premisas.** Las proposiciones a demostrar son las **conclusiones.**

EJEMPLO 1: Determinar si la siguiente es un razonamiento válido.

Dado: Si María estudia el bachillerato, estudia álgebra.
Dado: María estudia el bachillerato.
Conclusión: María estudia álgebra.

Solución: Considérese

p: María estudia el bachillerato.
q: María estudia álgebra.

Considérese el razonamiento como sigue:

Dado: $p \rightarrow q$.
Dado: p.
Conclusión: q.

El razonamiento es válido si y sólo si la proposición

$$[(p \to q) \wedge p] \to q$$

es una tautología. Esta proposición es una tautología (§9-6, Ejemplo 1). Por consiguiente el razonamiento es válido.

El razonamiento utilizado en el Ejemplo 1 ilustra una de las reglas básicas de inferencia, la **ley de separación,** conocida también como **modus ponens.**

Si una proposición de la forma "si p, entonces q" se supone verdadera y si p se conoce como verdadera, entonces q es verdadera.

EJEMPLO 2: Determinar si la siguiente es una argumentación válida.

Dado: Si $3x - 1 = 8$, entonces $3x = 9$.
Dado: $3x - 1 = 8$.
Conclusión: $3x = 9$.

Solución: Para

$$p\colon\ 3x - 1 = 8$$
$$q\colon\ 3x = 9$$

el razonamiento tiene la forma de la tautología

$$[(p \to q) \wedge p] \to q$$

siendo válido como en el Ejemplo 1.

EJEMPLO 3: Determinar si la siguiente es un razonamiento válido.

Dado: Usted ha trabajado con empeño, entonces usted ha pasado el examen.
Dado: Usted ha pasado el examen.
Conclusión: Usted ha trabajado con empeño.

Solución: Para

p: Usted ha trabajado con empeño.
q: Usted ha pasado el examen.

el razonamiento tiene la forma

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p.$$

Esta proposición no es una tautología (§9-6, Ejercicio 4). Por consiguiente el razonamiento no es válido.

Obsérvese que cualquiera que utilice el razonamiento del Ejemplo 3 para convencer a sus amigos que ha trabajado con empeño espera que consideren que la recíproca de cualquier proposición condicional verdadera es también verdadera; es decir,

Si $p \rightarrow q$, entonces $q \rightarrow p$.

Comparando los valores veritativos de $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$ observamos que una proposición no necesariamente implica su recíproca. Como otro ejemplo de este tipo de razonamiento considérese el siguiente anuncio:

Si quiere estar sano, coma KORNIS.

El anunciante desea que el consumidor asuma en forma falaz la proposición recíproca:

Si come KORNIS, entonces estará sano.

EJEMPLO 4: Determinar si el siguiente es un razonamiento válido:

Dado: Si usted ha trabajado con empeño, entonces usted ha pasado el examen.
Dado: Usted no ha pasado el examen.
Conclusión: Usted no ha trabajado con empeño.

Solución: Para

p: Usted ha trabajado con empeño.
q: Usted ha pasado el examen.

el razonamiento tiene la forma

$$[(p \to q) \wedge (\sim q)] \to (\sim p).$$

Esta proposición es una tautología (§9-6, Ejercicio 3), resultando válido el razonamiento.

Obsérvese que el razonamiento del Ejemplo 4 se basa en la equivalencia de cualquier proposición condicional $p \to q$ y su contrapositiva $(\sim q) \to (\sim p)$, tal como se vio en la Sección 9-4.

EJEMPLO 5: Determinar si el siguiente es un razonamiento válido:

Dado: Si usted trabajó con empeño, entonces, usted pasó el examen.
Dado: Usted no trabajó con empeño.
Conclusión: Usted no pasó el examen.

Solución: Para

p: Usted trabajó con empeño.
q: Usted pasó el examen.

el razonamiento tiene la forma

$$[(p \to q) \wedge (\sim p)] \to (\sim q).$$

Esta proposición no es una tautología (§9-6, Ejercicio 5), no resultando válido el razonamiento.

Obsérvese que quien utiliza el razonamiento del Ejercicio 5 espera que se considere verdadera la inversa $(\sim p) \to (\sim q)$ de

cualquier proposición verdadera $p \to q$. Como en el caso de una proposición condicional y su recíproca, sabemos que una proposición no necesariamente implica su inversa. Como otro ejemplo de este tipo de razonamiento, considérese el siguiente anuncio:

Si se limpia los dientes con SCRUB, entonces no tendrá caries.

El anunciante desea que se suponga en forma falaz la proposición inversa:

Si no se limpia los dientes con SCRUB, entonces tendrá caries.

La última forma de razonamiento válido que aquí consideraremos se basa en la tautología

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

(§9-6, Ejercicio 9). Considérense los siguientes ejemplos:

1. Si le gusta este libro, entonces le gustan las matemáticas.
   Si le gustan las matemáticas, entonces es inteligente.
   Por consiguiente, si le gusta este libro, entonces es inteligente.
2. Si un polígono es un cuadrado, entonces tiene 3 lados.
   Si un polígono tiene 3 lados, entonces tiene 4 ángulos.
   Por consiguiente, si un polígono es un cuadrado, entonces tiene 4 ángulos.
3. Si un polígono es un cuadrado, entonces tiene 4 lados.
   Si un polígono tiene 4 lados, entonces tiene 3 ángulos.
   Por consiguiente, si un polígono es un cuadrado, entonces tiene 3 ángulos.

En el segundo ejemplo ambas premisas son falsas, pero siendo verdadera la conclusión, el razonamiento es válido. En el tercer ejemplo la primera premisa es verdadera, la segunda premisa es falsa y la conclusión es falsa; el razonamiento es válido dado que está basado en una tautología. Se ve entonces que el hecho de que la conclusión sea verdadera no afecta el análisis de la validez de un razonamiento. La *validez* de un razonamiento depende exclusivamente de su forma; es decir, si está basado en una tautología. La *verdad* de la conclusión de un razonamiento válido depende de la verdad de las premisas.

Es importante recalcar el hecho de que la validez no tiene nada que ver con la cuestión de que si la conclusión es verdadera o fal-

sa. La conclusión puede ser falsa y sin embargo el razonamiento puede ser válido si es correcta la cadena de inferencias. Por el contrario, la conclusión puede ser verdadera y no obstante no ser válido el razonamiento por ser incorrecta la manera de inferir.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 9-7

Determinar si es válido cada uno de los siguientes razonamientos:

1. *Dado:* Si Pedro es francés, entonces estudia matemáticas.
   Dado: Pedro es francés.
   Conclusión: Por consiguiente, estudia matemáticas.

2. *Dado:* Si le gustan los perros, entonces vivirá hasta la edad de 120 años.
   Dado: Le gustan los perros.
   Conclusión: Vivirá 120 años.

3. Si el equipo gana el juego, entonces ganará el campeonato.
   No gana el campeonato.
   Por consiguiente, no gana el juego.

4. Si le gustan las matemáticas, entonces le gusta este libro.
   No le gustan las matemáticas.
   Por consiguiente, no le gusta este libro.

5. Si usted trabaja con empeño, entonces las cosas le salen bien.
   Las cosas no le salen bien.
   Por consiguiente, usted no trabaja con empeño.

6. Si está leyendo este libro, entonces le gustan las matemáticas.
   Le gustan las matemáticas.
   Por consiguiente, está leyendo este libro.

7. Si está leyendo este libro, entonces le gustan las matemáticas.
   No está leyendo este libro.
   Por consiguiente, no le gustan las matemáticas.

8. Si trabaja con empeño, entonces pasará el examen.
   Si pasa el examen, entonces el maestro lo elogiará.

Por consiguiente, si trabaja con empeño, entonces el maestro lo elogiará.

9. Si le gusta este libro, entonces le gustan las matemáticas.
Si le gustan las matemáticas, entonces es inteligente.
Por consiguiente, si es inteligente, entonces le gusta este libro.

10. Si es rubio, entonces tiene suerte.
Si tiene suerte, entonces será rico.
Por consiguiente, si no es rico, entonces no es rubio.

Dése una conclusión de tal forma que cada una de las siguientes argumentaciones sea válida.

11. Si bebe leche, entonces gozará de salud.
No goza de salud.
Por consiguiente, ...

12. Si come mucho, entonces engordará.
Como mucho.
Por consiguiente, ...

13. Si le gusta pescar, entonces le gusta nadar.
Si le gusta nadar, entonces es matemático.
Por consiguiente, ...

14. Si no trabaja con empeño, entonces no obtendrá sobresaliente.
Si no obtiene sobresaliente, entonces tendrá que repetir el curso.
Por consiguiente, ...

15. Si le gusta este libro, entonces no es un holgazán.
Si no es un holgazán, entonces se hará matemático.
Por consiguiente, ...

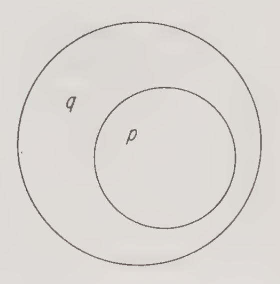
9-8 DIAGRAMAS DE EULER

En el siglo dieciocho el matemático suizo Leonhard Euler utilizó diagramas para presentar de una forma visual la cuestión de la validez de los argumentos. Hemos considerado los diagramas de Euler en la Sección 4-5. Los diagramas que aquí se utilizan, si bien resultan útiles como ayuda para razonar, no están esencialmente

ligados al proceso de razonamiento. Utilizaremos una región, por lo general una región circular, P para representar las situaciones en las que una proposición p es verdadera. Entonces, p es falsa en todas las situaciones representadas por los puntos de P. Al igual, utilizaremos una región Q para una proposición q, y así sucesivamente.

Consideremos primero la proposición $p \rightarrow q$ (si p, entonces q). La proposición es equivalente a decir "toda p es q", es decir, p es un subconjunto de q; si se tiene p se tiene que tener q. Eso lo hacemos ver dibujando dos círculos que representen a p y q. Consideremos las proposiciones:

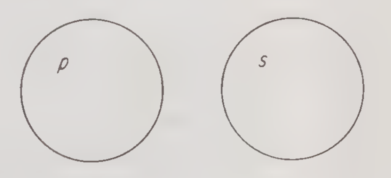
p: Es un limón
q: Es una fruta



De esta forma las figuras anteriores pueden considerarse como una representación gráfica de la proposición "todos los limones son fruta". Obsérvese que p y q son proposiciones consistentes.

Consideremos ahora las proposiciones:

p: Es un limón.
s: Es una naranja.



Recuérdese que las proposiciones p y s son proposiciones contrarias dado que no pueden ser ambas verdaderas respecto del mismo

objeto. Si se quiere hacer un diagrama para representar la proposición "ningún limón es naranja", deben dibujarse dos círculos cuya intersección sea el conjunto vacío:

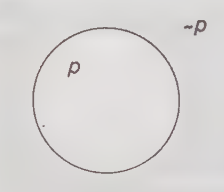
Obsérvese que ese mismo diagrama puede utilizarse para representar cualquiera de las siguientes proposiciones equivalentes:

Si es un limón, entonces no es naranja.
Si es una naranja, entonces no es limón.

También se pueden representar proposiciones contradictorias por medio de diagramas de Euler. Consideremos las proposiciones:

p: Es un limón.
$\sim p$: No es un limón.

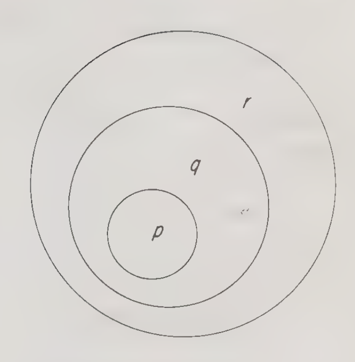
Si se dibuja un círculo que represente la proposición p, entonces $\sim p$ puede quedar representada por el conjunto de puntos fuera de p, es decir, por el complemento de p.



Volvamos ahora a la cuestión de la validez y analicemos de una forma gráfica el razonamiento

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r).$$

Se ha visto que la proposición "si p, entonces q" es equivalente a decir "toda p es q", pudiéndose dibujar p como un subconjunto de q. En forma análoga, la proposición "si q, entonces r" puede escribirse en la forma "toda q es r"; es decir, q es un subconjunto de r. Para representar esas dos proposiciones, dibujamos círculos de tal forma que p esté contenido en q y q esté contenido en r, del siguiente modo:



En el diagrama se ve claramente que p tiene que ser un subconjunto de r. Es decir, podemos concluir que "toda p es r" o "si p, entonces r", que era lo que se tenía que demostrar como conclusión de la argumentación.

En el diagrama también queda claro que cada una de las siguientes conclusiones *no* son válidas:

Toda r es q; $r \rightarrow q$.
Toda q es p; $q \rightarrow p$.

¿Puede verse en el diagrama que cada una de las siguientes conclusiones es una deducción lógica:

Si no r, entonces no p; $\sim r \rightarrow \sim p$
Si no q, entonces no p; $\sim q \rightarrow \sim p$

Los diagramas de Euler pueden aplicarse para verificar la validez de una argumentación. Se dibujan uno o más diagramas de Euler considerando las premisas y evitando la introducción de otras premisas adicionales. La estructura del diagrama indica si el razonamiento es válido. Lo mismo que en la Sección 9-7, no se tienen en cuenta los valores veritativos de las premisas y conclusiones.

EJEMPLO 1: Verificar la validez del siguiente razonamiento:

Todos los estudiantes de bachillerato son estudiantes del segundo año.
Todos los estudiantes del segundo año son atractivos.

Por consiguïente, todos los estudiantes de bachillerato son atractivos.

Solución: El siguiente es un diagrama de dicha argumentación:



El razonamiento es válido.

Obsérvese que en el Ejemplo 1 se podrá estar o no estar de acuerdo con la conclusión o con las premisas. Lo que importa es que se está *obligado* a dibujar el diagrama de esa forma. La conclusión es una consecuencia ineludible de las premisas dadas. Hay que evitar que el significado común y corriente de las palabras obre sobre nuestro razonamiento. A tal fin, la argumentación anterior la podemos enunciar de un modo abstracto como sigue:

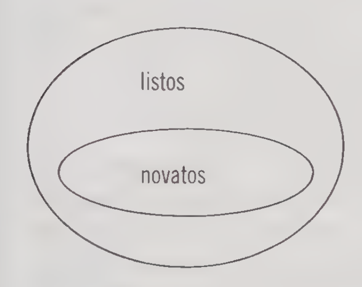
Toda u es s.
Toda s es a.
Por consiguiente, toda u es a.

Aquí nos basamos exclusivamente en la lógica y evitamos cualquier equívoco en cuanto al significado de palabras tales como "estudiantes de bachillerato", "estudiantes del 2º año" y "atractivos".

EJEMPLO 2: Hágase un diagrama para verificar la validez del siguiente razonamiento:

Todos los novatos son listos.
Toda persona atractiva es lista.
Por consiguiente, todos los novatos son atractivos.

Solución: La primera premisa nos dice que el conjunto de novatos es un subconjunto del conjunto de los listos. Esto lo podemos representar gráficamente como sigue:



Ahora tenemos que dibujar un círculo que represente el conjunto de las personas atractivas como un subconjunto del conjunto de los listos. Se presentan diversas posibilidades:



Cada una de las figuras dibujada representa una posibilidad diferente, pero sólo una demuestra que todos los novatos son atractivos. Por lo tanto, dado que no estamos *obligados* a llegar a esa conclusión, se dice que la argumentación *no es válida.*

Por otra parte, cada una de las figuras nos obliga a llegar a las siguientes conclusiones válidas:

Algunas personas listas son atractivas
Algunas personas listas son novatos.

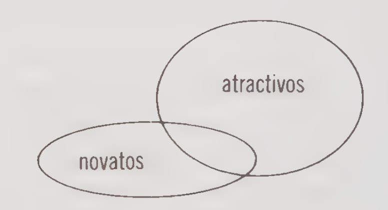
Consideremos ahora la siguiente proposición:

Algunos novatos son atractivos.

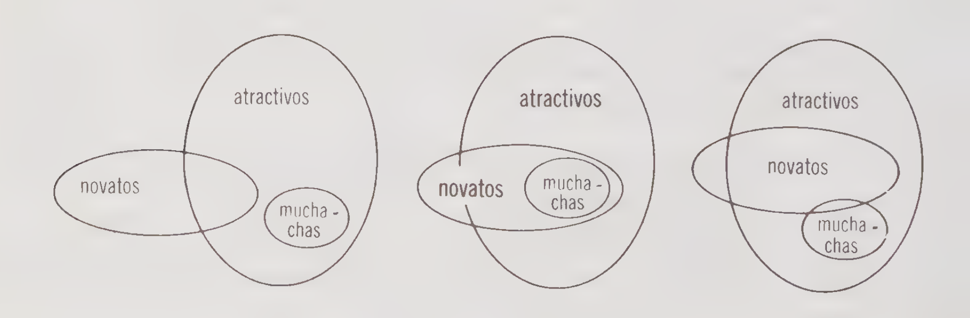
Esta proposición significa que hay *al menos un* novato que es atractivo. No excluye, sin embargo, la posibilidad de que todos los novatos sean atractivos. Consideremos ahora la siguiente argumentación cuya validez pretendemos comprobar:

Algunos novatos son atractivos.
Todas las muchachas son atractivas.
Por consiguiente, algunos novatos son muchachas.

Para investigar la validez de esa argumentación dibujamos círculos de Euler para las dos premisas y entonces vemos si estamos obligados a aceptar la conclusión. Dado que algunos novatos son atractivos, dibujaremos el siguiente diagrama, pero reconoceremos que el conjunto de los novatos podría haberse dibujado como un subconjunto propio del conjunto de las personas atractivas.



A continuación dibujamos un círculo que represente al conjunto de muchachas como un subconjunto propio del conjunto de las personas atractivas. Aquí se presentan varias posibilidades de hacer eso.



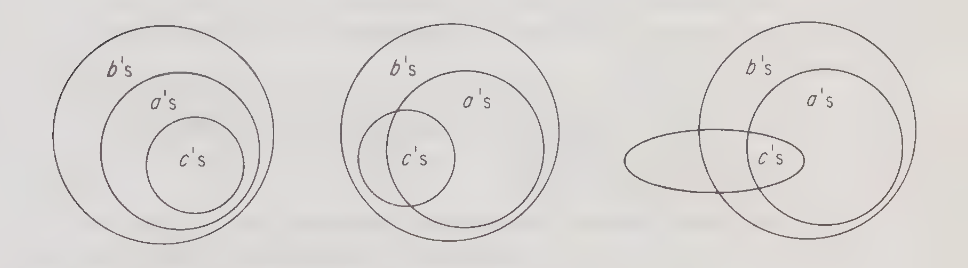
Obsérvese que en dos de las figuras se determina que algunos novatos son muchachas. Pero, como puede verse en la primera figura, no estamos obligados a aceptar la conclusión. Concluímos, pues, que el razonamiento no es válido.

EJEMPLO 3: Investigar la validez de la siguiente argumentación:

Todas las a son b.
Algunas a son c.
Por consiguiente, algunas c son b.

Solución: El razonamiento es válido.

En el Ejemplo 3 obsérvese que dado que algunas "*a*" son "*c*", entonces hay algunas "*c*" que son "*a*". Sin embargo, dado que todas las "*a*" son "*b*" se deduce que algunas "*c*" tienen que ser también "*b*".



EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 9-8

Investigar la validez de cada uno de los siguientes razonamientos:

1. A todos los estudiantes les gustan las matemáticas.
   Pedro es estudiante.
   Por consiguiente, a Pedro le gustan las matemáticas.

2. Todos los jóvenes son brillantes.
   A todas las personas brillantes les gustan las matemáticas.
   Por consiguiente, si es joven entonces es brillante.

3. Todas las muchachas son guapas.
   A todas las personas guapas les gusta este libro.
   Por consiguiente, si le gusta este libro entonces es muchacha.

4. Todos los maestros de matemáticas son aburridos.
   Algunos doctores son aburridos.
   Por consiguiente:
   (a) Algunos maestros de matemáticas son doctores.
   (b) Algunas personas aburridas son doctores.

5. Todos los jóvenes son listos.
   Algunos jóvenes son hombres.
   Por consiguiente:
   (a) Algunos hombres son listos.
   (b) Algunos hombres son jóvenes.
   (c) Algunas personas listas son hombres.
   (d) Todos los hombres son jóvenes.

6. Todos los muchachos son hermosos.
   Algunos muchachos son atletas.
   Por consiguiente, algunos atletas son hermosos.

7. Todos los maestros de matemáticas son interesantes.
   Todos los individuos atractivos son interesantes.
   Algunos maestros de matemáticas son benévolos.
   Por consiguiente:
   (a) Algunas personas interesantes son benévolas.
   (b) Algunos maestros de matemáticas son atractivos.
   (c) Todos los maestros de matemáticas son atractivos.
   (d) Todos los maestros de matemáticas son benévolos.
   (e) Algunas personas benévolas son atractivas.
   (f) Ningún maestro de matemáticas es atractivo.
   (g) Ningún individuo atractivo es interesante.

8. Todas las x son y.
   Algunas y son z.
   Por consiguiente:
   (a) Algunas x son z.
   (b) Algunas z son y.

9. Todas las a son b.
Todas las b son c.
Algunas d no son c.
Por consiguiente:
(a) Todas las a son c.
(b) Algunas d no son b.
(c) Algunas d no son a.
(d) Algunas d son c.

10. Todos los bums son mums.
Algunos bums son tums.
Algunos zums son bums.
Por consiguiente:
(a) Algunos mums son bums.
(b) Algunos zums son mums.
(c) Algunos mums son tums.
(d) Ningún tum es zum.
(e) Algunos zums son nums-tums.

EXAMEN RELATIVO AL CAPITULO 9

1. Utilizar un símbolo apropiado que identifique el cuantificador que se aplica en cada una de las siguientes proposiciones, siendo x una variable real:
(a) Para todo x, $x + 2 = 2 + x$.
(b) Existe al menos un x tal que $x + 7 = 5$.
(c) Algunos números reales son números racionales.

2. Enunciar en palabras la negación de las proposiciones:
(a) Todos los gatos tienen cola.
(b) Algunos hombres son soldados.

3. Identificar las combinaciones de valores veritativos que pueden presentarse para las proposiciones:

$$p: \quad x^2 = 36$$
$$q: \quad x \neq 6$$

4. Enunciar la recíproca, la inversa y la contraposición de la proposición:

$$\text{Si } x < 3, \text{ entonces } x \neq 3.$$

5. Escribir cada proposición en la forma si-entonces:
   (a) Los ángulos rectos son congruentes.
   (b) Para que le guste nadar es necesario que le guste el agua.

6. Escribir cada proposición en forma simbólica, considerando:

p: Llevo un abrigo.
q: Está nevando.

   (a) Para que lleve abrigo es necesario que esté nevando.
   (b) Llevo abrigo sólo si nieva.

7. Escribir cada proposición en forma simbólica:
   (a) p es suficiente para q.
   (b) p es necesario y suficiente para $(\sim q)$.

8. Identificar como verdadero o falso:
   (a) $3 \times 5 = 35$ sólo si $6 \times 5 = 70$.
   (b) Para que $2 \times x = 6$ es suficiente que $2 \times 5 = 6$.

9. Investigar la validez de los siguientes razonamientos:
   (a) Todos los perros quieren a sus dueños.
   Si un animal quiere a su dueño, estará bien cuidado.
   Por consiguiente, todos los perros están bien cuidados.
   (b) Si x es entero positivo, entonces $x^2 > 0$.
   $x^2 \not> 0$.
   Por consiguiente, x no es entero positivo.

10. Utilizar una tabla veritativa para determinar si la proposición

$$[(p \rightarrow q) \land (\sim q)] \rightarrow (\sim p)$$

es una tautología.

Capítulo 10

CONCEPTOS DE GEOMETRIA

La geometría es una rama del conocimiento en pleno desarrollo, con un sinnúmero de aplicaciones y una belleza inherente a su estructura sistemática. En este último capítulo consideraremos la evolución de la geometría desde sus aspectos prácticos utilizados hace varios miles de años hasta los sistemas lógicos que hoy llamamos geometrías. Analizaremos brevemente algunas de esas geometrías aunque de un modo informal.

Se ha visto cómo el álgebra puede utilizarse en el estudio de la geometría como, por ejemplo, en el empleo de coordenadas. También la geometría puede utilizarse en el estudio del álgebra como, por ejemplo, en el uso de una recta numérica (Capítulo 7). La estrecha relación entre el álgebra y la geometría puede observarse viéndose que el álgebra de los números reales y la geometría de

los puntos de una recta euclidiana son básicamente lo mismo. Es así como los griegos representaban los números mediante segmentos de recta en tanto no se desarrollaron notaciones más convenientes. Ponemos fin a este último capítulo analizando otras propiedades de la geometría analítica. Esta última nos permite reconocer que el álgebra y la geometría proporcionan dos medios de abordar el mismo tema: la matemática.

10-1 LA EVOLUCION DE LA GEOMETRIA

En los tiempos remotos la geometría era una ciencia práctica y empírica, es decir, una ciencia basada en las experiencias y observaciones del hombre. Las teorías generales, los postulados y las demostraciones son muy posteriores. No se conoce por completo la historia de la geometría. Sin embargo, podemos mencionar las siguientes estapas que han contribuido en forma decisiva a su evolución:

1. Los procedimientos empíricos de los antiguos babilonios y egipcios.

2. El amor de los griegos al saber por el saber y su empleo en las construcciones clásicas.

3. La sistematización de la geometría hecha por Euclides.

4. La continuación de la obra de Euclides durante la edad de oro de Grecia.

5. La contribución de los matemáticos hindúes, árabes y persas durante la Edad Media Europea.

6. El despertar de Europa con su creciente número de universidades, el invento de las imprentas y el florecimiento de todas las ramas del conocimiento.

7. La introducción de sistemas de coordenadas en el siglo diecisiete.

8. La aplicación del álgebra (y también del cálculo) a la geometría en el siglo dieciocho.

9. El reconocimiento de los puntos y rectas como elementos

no definidos (abstractos), lo cual da lugar, en el siglo diecinueve, a muchas geometrías diferentes.

10. El énfasis dado, en pleno siglo veinte, a la generalización, al concepto aritmético y al fundamento axiomático.

En cada etapa del desarrollo de la geometría se encuentran usos y aplicaciones de la geometría a las matemáticas de su tiempo. También se ve la influencia que ejercen sobre la geometría otros conceptos matemáticos y culturales.

La geometría de los antiguos babilonios y egipcios era relativa a áreas y volúmenes. Los babilonios —4 000 años antes de Cristo— utilizaban el producto de la longitud y la anchura de un campo rectangular como medida de dicho campo.

Las pirámides de Egipto son una evidencia de la ingeniería remota que, sin duda alguna, requería del uso de muchos conceptos geométricos. Por ejemplo, las losas de granito que cubren las cámaras de una pirámide construida alrededor de 3 000 años antes de Cristo están a 60 metros sobre el nivel del suelo, pesan alrededor de 50 toneladas cada una y se llevaron probablemente de una cantera que está a más de 900 kilómetros. Las reglas y fórmulas de los babilonios y egipcios eran resultados empíricos. Cada una de ellas se consideraba por sí sola dado que no existía un conocimiento teórico geométrico que pudiese abarcarlas. Los conceptos de geometría de los babilonios y egipcios permanecen, al parecer, en su nivel meramente pragmático hasta cerca del año 600 antes de Cristo, época a partir de la cual los griegos empiezan a tener cierta influencia.

Los griegos con su amor al razonamiento y conocimiento dejan una profunda impronta en la geometría. Consideran su estudio como una ciencia independiente de sus aplicaciones prácticas y como parte de una educación liberal. Amplían el campo de la geometría incluyendo, no sólo fórmulas empíricas para áreas y volúmenes, sino también:

1. El empleo de segmentos rectilíneos para representar números;
2. El estudio de propiedades de los polígonos y de las rectas paralelas;
3. Propiedades de la circunferencia y otras secciones cónicas;
4. Construcciones clásicas con regla y compás;
5. Razones y proporciones deducidas a partir de un estudio de polígonos semejantes;

6. Demostraciones de las consecuencias de un conjunto de postulados.

La mayor parte del progreso intelectual de la antigua Grecia proviene de escuelas que agrupaban alrededor de ellas notables eruditos como Tales, Pitágoras, Platón y grupos de eruditos como los sofistas.

Por el año 300 antes de Cristo el centro de la actividad matemática pasa de Grecia a Egipto, principalmente a la nueva universidad de Alejandría en la que Euclides era profesor de matemáticas. Euclides escribió un mínimo de diez tratados que cubrían la matemática de su tiempo. Su obra más famosa, *Elementos;* consta de trece libros en los que expone con elegancia:

La geometría plana (Libros I-IV)
La teoría de las proporciones (Libros V y VI)
La teoría de los números (Libros VII-IX) ;
La teoría de los inconmesurables (Libro X) ; y
La geometría de los cuerpos (Libros XI-XIII) .

Dichos temas se relacionaban allí mucho más entre sí que hoy en día. Las proporciones se fundaron sobre los polígonos semejantes, la teoría de los números sobre longitudes de segmentos de rectas y los inconmesurables sobre las proporciones y la construcción de segmentos rectilíneos. Los libros sobre geometría incluyen casi todos los conceptos que hoy en día se abordan en un curso de geometría a nivel de bachillerato. Presentan también demostraciones geométricas de identidades algebraicas y soluciones geométricas de ecuaciones tanto lineales como cuadráticas. Los *Elementos* de Euclides constituyeron una aportación decisiva a la sistematización de la geometría y al conocimiento matemático de aquel tiempo. No sabemos hasta qué punto esta aportación es original de Euclides, pero sí podemos decir que los *Elementos* representan una consecuencia lógica de la geometría conocida en la antigua Grecia. En la Sección 10-2 consideraremos, aunque muy brevemente, la geometría de Euclides.

El prestigio de Alejandría perduró durante muchos años después de Euclides. Arquímedes (alrededor del año 250 antes de Cristo) estudió allí e hizo grandes contribuciones a la geometría, al tiempo que se dedicaba a la investigación en otros campos. Apolonio (225 antes de Cristo) y Papus (alrededor de 300 después de Cristo) también dieron realce al prestigio de Alejandría con sus trabajos sobre geometría. Pero hacia el año 700 después de Cristo

la geometría de mediciones de los antiguos babilonios y egipcios había sufrido algunas modificaciones originadas por el culto a la ciencia y a la razón de los griegos y necesitaba nuevas aportaciones.

Durante la Edad Media en Europa las aportaciones matemáticas de los griegos son modificadas por los matemáticos de la India, Arabia y Persia. La mayor parte de esta influencia es de carácter práctico. Es notable el avance que se hace en notación de números, en áreas, volúmenes, construcciones clásicas, astronomía y trigonometría (es decir, la medida de los triángulos). Se discute el postulado de las paralelas de Euclides (§10-3) y Omar Khayán, el autor de los Rubaiyat, escribe un tratado sobre álgebra desde un enfoque geométrico.

Tanto en las matemáticas como en el arte, los primeros signos del despertar de Europa provienen de Italia. Existen algunas evidencias de cierta inquietud matemática en Inglaterra en el siglo ocho y en Francia en el siglo diez. Sin embargo, el progreso es muy lento. A finales del siglo doce, tras largos viajes, Leonardo Fibonacci vuelve a Italia donde publica diversos tratados dando a conocer un sinnúmero de cuestiones sobre notación numérica, aritmética, álgebra, geometría y trigonometría. Estas nuevas ideas no tardaron en introducirse en las universidades europeas proporcionando el estímulo que hace falta para los grandes descubrimientos. Más tarde, en el siglo quince, la imprenta proporciona un medio de diseminar el conocimiento dando lugar a una gran actividad intelectual que se extiende rápidamente por toda Europa. Al principio fue una actividad intelectual dedicada al estudio de los conocimientos del pasado. Pero tras esto, Alberti y los artistas italianos desarrollan algunos de los principios de la geometría descriptiva y proporcionan las bases para la geometría proyectiva (§10-4). En Francia se introducen las letras para representar números. Gradualmente la actividad matemática se va incrementando y al final del siglo diecisiete está en pleno desarrollo. Durante los últimos tres siglos la actividad ha sido como una avalancha, desarrollándose constantemente y sin que se vea algún signo de pérdida de fuerza. En tal alud de conocimientos nos va a resultar muy difícil valorar debidamente, o incluso reconocer, la evolución de conceptos geométricos.

Los sistemas coordenados que se utilizan en matemáticas reciben el nombre de cartesianos en reconocimiento al trabajo de René Descartes en el siglo diecisiete. En él, Descartes, aplica la notación algebraica al estudio de curvas y considera las expresiones algebraicas como representantes de números y no de objetos geométricos. Antes, los términos lineales como por ejemplo x o $2y$ se considera-

ban como segmentos de rectas, los términos cuadráticos tales como x^2 o xy se consideraban como áreas y los términos cúbicos como x^3 o $x^2\,y$ se consideraban como volúmenes. Tales interpretaciones restringían la suma a cantidades semejantes. Por ejemplo, se podían sumar x^2 y xy (áreas) pero no se podían sumar x^2 y x (es decir, una área y un segmento de recta). La interpretación de Descartes de todas las expresiones algebraicas como números y por consiguiente como segmentos de recta, hace posible considerar sumas tales como $x^2 + x$. Este nuevo punto de vista proporciona una base para la representación de curvas por medio de ecuaciones. La aplicación de estas nuevas ideas a la geometría caracteriza al siglo diecisiete. Tienen lugar la aplicación del álgebra iniciada por Descartes y Fermat (§10-6), las aplicaciones de las proyecciones iniciadas por Desargues y Pascal (§10-4) y la aplicación del cálculo iniciada por Newton y Leibniz.

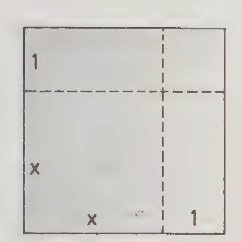
En los siglos dieciocho y diecinueve se siguen aplicando cada vez con mayor éxito las ideas dadas en el siglo diecisiete y se desarrollan las geometrías no euclideas (§10-3). Durante la última mitad del siglo dieciocho van apareciendo signos cada vez más evidentes del inmediato florecimiento esplendoroso de actitud matemática que, caracteriza a los siglos diecinueve y veinte. Dados el gran incremento en la terminología y el carácter abstracto de muchas de las aportaciones, nuestro estudio de la evolución de la geometría se torna, por necesidad, muy general.

En el siglo diecinueve el empleo de las coordenadas y la aceptación de los puntos como elementos no definibles hacen posible el desarrollo formal de las geometrías no euclideas, así como el de otras geometrías. Esto ha dado lugar, en el siglo veinte, al desarrollo de geometrías como sistemas lógicos y al reconocimiento de la equivalencia de los enfoques algebraicos y geométricos de las matemáticas. Trataremos de ilustrar dicha equivalencia en nuestro estudio de geometrías coordenadas (10-5 a 10-11) y geometrías finitas (10-5).

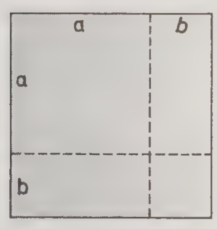
EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 10-1

Estos ejercicios ilustran el empleo por los antiguos griegos de las áreas de las figuras para justificar proposiciones que hoy consideramos como algebraicas. Utilícese la figura dada para explicar cada una de las siguientes proposiciones:

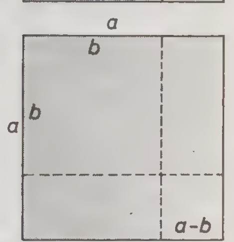
1. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$



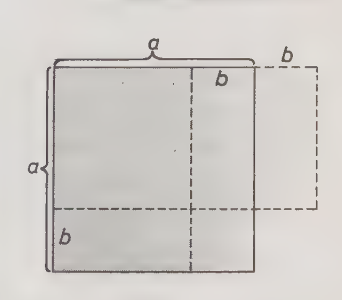
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $a > b$



4. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a > b$



Hacer una figura como en los Ejercicios del 1 al 4 y utilizar la figura para explicar cada una de las siguientes proposiciones:

5. $(a + b)a = a^2 + ab$
6. $a(b + c) = ab + ac$
7. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

*8. $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

10-2 GEOMETRIA EUCLIDEA

La geometría que usualmente se estudia en el bachillerato es cos-

tumbre llamarla geometría euclidea en honor de los *Elementos* de Euclides, obra que proporcionó una brillante sistematización de la mayor parte de las propiedades de dicha geometría. Desde los tiempos de Euclides los matemáticos han ido perfeccionando los sistemas de postulados y han enunciado explícitamente muchos de los supuestos que Euclides acepta sin mencionar.

Euclides basa su trabajo sobre cinco postulados y cinco nociones comunes que se consideraban aplicables a todas las ciencias. Las nociones comunes eran:

1. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
2. Si a cantidades iguales se suman cantidades iguales, las sumas son iguales.
3. Si a cantidades iguales se restan cantidades iguales, las diferencias son iguales.
4. Dos cosas que coinciden son iguales.
5. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Obsérvese que las tres primeras nociones son propiedades de la relación "igual". La cuarta noción ha dado lugar a discusiones filosóficas sobre si dos cosas diferentes podían coincidir y ha originado dificultades lógicas ocasionadas por el uso de la proposición recíproca:

Cosas que son iguales pueden hacerse coincidir.

La quinta noción ha dado lugar a dificultades dado que sólo es válida para conjuntos finitos. Por ejemplo, hay tantos enteros positivos pares como enteros positivos.

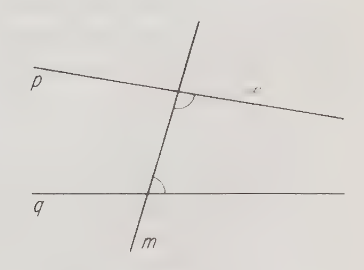
Los tres primeros postulados de Euclides son:

1. Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.
2. Cualquier segmento de recta puede prolongarse y determinar una recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.

Estos tres fueron probablemente los supuestos de Platón para las construcciones con regla y compás. Los otros dos postulados de Euclides son:

4. Dos ángulos rectos cualesquiera son iguales.
5. Si una recta m corta a dos rectas p y q de tal forma que la suma de los ángulos interiores sobre el mismo lado de m es menor que dos ángulos rectos, entonces las rectas p y q se cortan del lado

de m en el que la suma de los ángulos interiores es menor que dos ángulos rectos.



En la sección 10-3 consideraremos con más detalle el quinto postulado (o postulado de las paralelas) de Euclides. El nombre *de postulado de las paralelas* proviene del empleo del postulado para demostrar el paralelismo de rectas y fundamentalmente para demostrar la existencia de una y sólo una recta que pasa por un punto dado y es paralela a una recta dada.

La excelencia de la estructura lógica de las demostraciones de Euclides es una de sus mayores contribuciones a la geometría. Sus demostraciones constan de:

un enunciado de la proposición que tiene que demostrarse;
un enunciado de los datos (por lo general con un diagrama);
una indicación del uso que debe hacerse de los datos;
una construcción de cualquier línea o figura adicional que se requiera;
una demostración sintética; y
una conclusión estableciendo lo que se ha hecho.

Euclides adoptó muchas de las ideas de los griegos, incluyendo la distinción que hace Aristóteles entre postulado y noción común. Consciente con la importancia que los griegos daban a las construcciones, con frecuencia construyó gráficamente con regla y compás puntos y rectas, sin considerar los postulados que implican la existencia de tales elementos. Según esto, Euclides asumió tácitamente que:

Los puntos y las rectas existen.
No todos los puntos están sobre la misma recta.
No todos los puntos están sobre el mismo plano.
Dos rectas diferentes tienen a lo sumo un punto en común.
Una recta es un conjunto continuo de puntos.

Hizo también suposiciones tácitas que implican que:

Cosas que son iguales pueden hacerse coincidir.
Todos los conjuntos de objetos son finitos.
Existen relaciones de orden sobre una recta.
Una recta es infinita en extensión.

Con frecuencia Euclides utiliza como definiciones descripciones de términos, tal como puede observarse en las ocho primeras definiciones que hace:

1. Un *punto* es lo que no tiene parte.
2. Una *línea* no tiene ancho, sólo largo.
3. Los extremos de una línea son puntos.
4. Una *línea recta* es aquella que descansa llanamente sobre sus puntos.
5. Una *superficie* es lo que sólo tiene ancho y largo.
6. Los extremos de una superficie son líneas.
7. Una *superficie plana* es aquella que descansa llanamente sobre sus rectas.
8. Un *ángulo plano* es la inclinación de dos rectas que en un plano se tocan la una a la otra y que no descansan las dos sobre una recta.

Se reconoce hoy en día que es imposible definir todos los términos que se utilizan. Algunos términos hay que dejarlos sin definir. Por ejemplo, se suele dejar sin definir el punto y la recta. Por lo demás, toda definición tiene que tener las cuatro siguientes propiedades:

(i) El término que se define hay que situarlo dentro de su *categoría más próxima.*
Por ejemplo: un triángulo es una figura geométrica.

(ii) Deben darse las *propiedades distintivas* que sea preciso. Por ejemplo: un triángulo consta de tres puntos no colineales y de los segmentos de recta determinados por ellos.

(iii) La definición debe ser *reversible.*
Por ejemplo: Si una figura geométrica consta de tres puntos no colineales y los segmentos de recta determinados por ellos, es un triángulo.

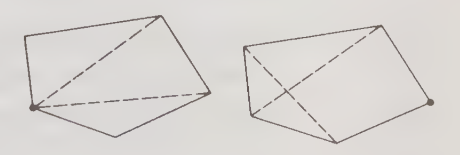
(iv) En la definición deben de intervenir *términos simples* (es decir, términos indefinidos o previamente definidos).
Como ejemplo considérese la definición de triángulo dado en el ejemplo (ii)

Al elaborar su geometría, Euclides pensó probablemente en una descripción del universo físico. A ese respecto, la geometría euclidea moderna, basada sobre modificaciones a los postulados de Euclides, parace proporcionar un modelo bastante aceptable del universo físico. Sin embargo, en la actualidad no se sabe si la geometría euclidea es válida en el universo físico. Se sospecha que no es válida cuando se consideran distancias muy grandes, como en astronomía.

La geometría euclidea es la geometría de **isometrías;** es decir, la geometría en la que las distancias no cambian (invariantes). Muchos consideran las isometrías como movimientos rígidos y consideran por consiguiente la geometría euclidea como la geometría en la que las figuras pueden moverse sin cambiar de tamaño y forma. A veces se dice que los triángulos son figuras rígidas; es decir, figuras cuyo tamaño y forma no pueden cambiarse sin que se cambie al menos la longitud de uno de sus lados. Si consideramos que los triángulos tienen esa propiedad, ¿cuántas diagonales se requieren para convertir en figuras rígidas los polígonos de 3, 4, 5,..., n lados? El modelo se muestra en la siguiente tabla:

número de lados	3	4	5	6	7	8	9	10	12	n
número de diagonales para hacerlo rigido	0	1	2	3	4	5	6	7	9	n-3

Una vez que se haya verificado que la tabla es correcta, considérese el número de modos en que pueden trazarse las diagonales necesarias en el cuadrilátero y en el pentágono. En el caso del cuadrilátero se necesita una diagonal, pudiéndose utilizar una cualquiera de ellas. Por consiguiente, la diagonal puede seleccionarse de dos formas. En el caso del pentágono, las dos diagonales pueden tener un vértice común (uno cualquiera de los cinco) o pueden utilizarse cuatro de los vértices (por lo tanto dejando libre uno cualquiera de los cinco); por consiguiente, la elección puede hacerse de diez formas. Hay por lo menos cuarenta formas para el exágono. Un análisis completo del número de formas de hacer una figura rígida de un exágono va más allá del alcance de este libro.



A lo largo del estudio de la geometría euclidea, y de cualquier otra geometría, es útil hacer conjeturas y verificarlas partiendo del sistema de postulados en consideración. Cuando un teorema se demuestra para el plano, considéresele también en el espacio. Considérese el teorema recíproco tanto en el plano como en el espacio. El análisis en el espacio puede ser deductivo o informal. Por lo general, un planteo informal o intuitivo proporciona una idea bastante precisa. Como un ejemplo de la extensión de los conceptos sobre el plano a los conceptos del espacio, consideremos la perpendicularidad (es decir, las intersecciones en ángulos rectos). ¿Bajo qué condiciones existen figuras perpendiculares sobre un plano? ¿Bajo qué condiciones son las perpendiculares *únicas* (es decir, determinadas de tal manera que exista una y sólo una de ellas que satisfaga las condiciones dadas)? Ahora hágase extensiva cada una de estas consideraciones a figuras en el espacio. Las paralelas pueden analizarse de igual modo. Estas ideas se dejan como Ejercicios 7-18.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 10-2

En los Ejercicios del 1 al 6 analícese si cada definición tiene las cuatro propiedades mencionadas en esta sección. Justifique la contestación:

1. Un punto es lo que no tiene parte.

2. Una recta es longitud sin ancho.

3. Un pato es una ave.

4. Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un punto dado.

5. Un triángulo es un polígono de tres lados.

6. Un polígono es convexo si al considerarse cada uno de los lados del polígono como arista común de dos semiplanos, el polígono queda en su totalidad sobre uno de los semiplanos.

7. ¿Es siempre posible determinar en un plano:
(**a**) una recta t perpendicular a una recta dada m?
(**b**) una recta t perpendicular a una recta dada m y que pase por un punto dado A de m?

(c) una recta t perpendicular a una recta dada m y que pase por un punto dado B no contenido en m?

(d) una recta t perpendicular a una recta dada m que pase por dos puntos dados, uno A contenido en m y otro B no contenido en m?

(e) una recta t perpendicular a dos rectas dadas m y n?

8. Repetir el Ejercicio 7 para puntos y rectas en el espacio.

9. En el Ejercicio 7, ¿de las rectas t cuáles son las que se determinan en forma única?

10. En el Ejercicio 8, ¿de las rectas t cuáles son las que se determinan en forma única?

11. ¿Es siempre posible determinar en el espacio:

(a) una recta t perpendicular a un plano dado α?

(b) una recta t perpendicular a un plano dado α y que contenga un punto dado A de α?

(c) una recta t perpendicular a un plano dado α y que contenga a un punto dado B no contenido en α?

(d) una recta t perpendicular a un plano dado α y que contenga dos puntos dados, un punto A de α y un punto B no contenido en α?

(e) una recta t perpendicular a dos planos dados α y β?

12. ¿Es siempre posible determinar en el espacio:

(a) un plano β perpendicular a un plano dado α?

(b) un plano β perpendicular a un plano dado α y que contenga un punto A dado en en α?

(c) un plano β perpendicular a un plano dado α y que contenga una recta dada m en α?

(d) un plano β perpendicular a un plano dado α y que contenga un punto dado B no contenido en α?

(e) un plano β perpendicular a un plano dado α y que contenga una recta dada m no contenida en α?

(f) un plano β perpendicular a un plano dado α y que contenga dos puntos dados, un punto A de α y un punto B no contenido en α?

13. En el Ejercicio 11, ¿de las rectas t cuáles son las que se determinan en forma única?

14. En el Ejercicio 12, ¿de los planos β cuáles son los que se determinan en forma única?

Sustitúyase "perpendicular" por "paralela" y repítanse:

15. Ejercicios 7 y 9.

16. Ejercicios 8 y 10.

17. Ejercicios 11 y 13.

18. Ejercicios 12 y 14.

10-3 GEOMETRIAS NO EUCLIDEAS

El quinto postulado de Euclides parece haber sido "producto de la necesidad". Euclides trató de evitar su uso en la medida que le fue posible, pero no podía completar sus demostraciones sin recurrir a él. Durante dos mil años los matemáticos trataron de evitar el empleo del quinto postulado. Sin embargo, en ese empeño o bien cometían un error o, inadvertidamente, hacían una consideración equivalente. A continuación se exponen algunas de las consideraciones equivalentes que se utilizaron:

1. Si una línea (recta) corta a una de dos rectas paralelas, entonces también cortará a la otra. (Proclo, siglo quinto).
2. Dada una recta cualquiera m y un punto cualquiera P que no esté en m, existe una y sólo una recta que pase por P y sea paralela a m (axioma de Playfair).
3. Existe un par de líneas (rectas) coplanares equidistantes entre sí.
4. Existe al menos un triángulo cuyos tres ángulos suman 180°.
5. Existe un par de triángulos semejantes que no son congruentes.
6. Por tres puntos cualesquiera que no estén en línea recta se puede trazar una circunferencia.

Cada una de estas proposiciones puede demostrarse como un teorema de la geometría euclidea. Sin embargo, en algún momento de la demostración se requiere el quinto postulado o una proposición cuya demostración ha requerido el uso de dicho postulado.

Hay dos geometrías no euclideas que se conocen con los nombres de *geometría elíptica* y *geometría hiperbólica*. Estas geometrías están basadas sobre modificaciones hechas al quinto postulado de Euclides. Por ejemplo, considérese el quinto postulado en la

forma del axioma de Playfair y obsérvense estas otras dos posibilidades:

Dados una recta m cualquiera y un punto P cualquiera no contenido en m, no existe ninguna recta que pase por P y sea paralela a m (geometría elíptica).

Dados una recta m cualquiera y un punto P cualquiera, no contenido en m, existen al menos dos rectas que pasan por P y son paralelas a m (geometría hiperbólica).

Estos son los postulados que diferencian las geometrías elíptica e hiperbólica de la geometría euclidea. Los demás postulados de Euclides se satisfacen en las tres geometrías.

Hay otras muchas geometrías que son diferentes de la euclidea es decir, *no* son euclideas. Sin embargo, sólo las geometrías elíptica e hiperbólica se conocen como *no-euclideas.* La distinción entre geometrías "que no son euclideas" y geometrías "no-euclideas" refleja el enorme desarrollo del concepto de geometría.

Es costumbre considerar el universo físico como un modelo de geometría euclidea. Haciéndolo así, ahora consideraremos los puntos y las rectas sobre un plano como un modelo de la geometría euclidea bidimensional y trataremos de establecer modelos de las geometrías no-euclideas bidimensionales.

Un modelo para la geometría elíptica bidimensional puede obtenerse pensando en las rectas diametrales (rectas que pasen por el centro) y en los planos diametrales (planos que pasan por el centro) de una esfera. Las rectas diametrales representan puntos de la geometría elíptica, los planos diametrales representan rectas de la geometría elíptica. Por consiguiente, dado que en la geometría euclidea dos rectas con un punto en común determinan un plano, en la geometría elíptica se tiene:

Dos puntos cualesquiera (rectas diametrales) determinan una recta (plano diametral).

La ausencia de rectas paralelas es evidente por el hecho de que en la geometría elíptica también se tiene que:

Dos rectas cualesquiera (planos diametrales) determinan un punto (recta diametral).

Hay también otros modelos para la geometría elíptica. Cada mo-

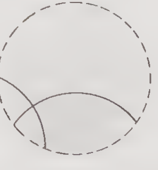
delo se aplica a diferentes propósitos. La geometría elíptica también se conoce bajo el nombre de geometría riemaniana en honor a Bernard Riemann (1826-1866), quien hizo grandes aportaciones a ella.

Un modelo para la geometría hiperbólica bidimensional puede obtenerse pensando en las circunferencias que cortan a una circunferencia (fija) dada según ángulos rectos y considerando sólo los puntos interiores de la circunferencia fija. Ese modelo se basa en el trabajo de Henri Poincaré (1854-1912). Poincaré consideró el universo físico como el interior de una esfera de radio R tal que la temperatura absoluta t de cualquier punto situado a una distancia r del centro de la esfera está dada por la fórmula

$$t = c(R^2 - r^2),$$

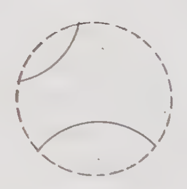
donde c es una constante de proporcionalidad. Supuso (suposición que hoy en día no se acepta) que los cuerpos físicos disminuían de volumen al decrecer la temperatura y desaparecían por completo en la superficie que limita la esfera antes mencionada en donde la temperatura es de cero absoluto. Bajo esta suposición la trayectoria más corta entre dos puntos dados sería, según puede demostrarse, a lo largo de un arco de circunferencia que cortara a la esfera en ángulo recto.

Se obtiene ahora un modelo para la geometría hiperbólica bidimensional considerando los puntos interiores del círculo resultante de cortar la esfera de Poincaré por un plano que pase por su centro. Los arcos de las circunferencias que cortan según ángulos rectos dicha circunferencia fija representan rectas. Dos rectas se cortan si tienen un punto interior de la circunferencia fija en común; son paralelas si tienen un punto de la circunferencia fija en común; de lo contrario, son rectas que no se cortan. En este modelo los diámetros de la circunferencia fija se consideran como arcos de circunferencias de radio infinito.



rectas que se cortan


rectas paralelas


rectas que no se cortan

Las geometrías euclidea, elíptica e hiperbólica tienen muchas

propiedades diferentes. No obstante, en la proximidad de uno cualquiera de sus puntos, las tres geometrías aproximadamente coinciden. Obsérvese también que la geometría sobre una esfera en la vecindad de un punto *P* es en esencia la misma que la geometría en la vecindad del punto *P* sobre un plano que es tangente a la esfera en *P*. En relación con el universo físico sabemos que la geometría en la vecindad de cualquier punto parece ser euclidea. Sin embargo, no sabemos si la vecindad del punto que estamos en condiciones de observar es relativamente tan pequeña, que lo que de hecho estemos observando sea la geometría en la vecindad de un punto en un espacio elíptico o hiperbólico. Las tres geometrías son igualmente consistentes y en cierto sentido igualmente probables como geometrías del universo físico.

Sabemos que la geometría euclidea constituye por lo menos una buena aproximación de la geometría de la porción del espacio físico en la que el hombre puede hacer mediciones. Es una geometría relativamente sencilla, con gran número de teoremas y aplicaciones. Por ello, mientras no se presente una evidencia irrefutable en el sentido que el universo físico tiene una geometría diferente, seguiremos sin duda estudiando la geometría euclidea.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 10-3

1. Hay una geometría de puntos de una esfera y círculos máximos (secciones por planos que pasan por el centro) de la esfera. Esta geometría cuyos puntos reciben el nombre de **puntos esféricos** y sus círculos máximos **rectas esféricas**, recibe el nombre de **geometría esférica.** Dibújese una esfera con dos líneas esféricas *m* y *n*.

2. Dibújese una esfera con dos puntos esféricos *A* y *B* y una recta esférica que pase por *A* y *B*.

3. Considérese la superficie de la esfera terrestre. Dibújese dicha esfera con el ecuador como recta esférica. Señálense los polos norte, N, y sur, S. Trácense varias rectas esféricas que pasen por los puntos *N* y *S*. (Piénsese en los meridianos).

*4. Aplíquense longitudes y latitudes para explicar cómo se puede determinar la posición de cualquier punto de la Tierra (y por lo tanto de cualquier esfera), mediante dos coordenadas; esto equivale a decir que la geometría esférica es una *geometría de dos dimensiones.*

Identificar en qué geometría o geometrías bidimensionales (euclidea, elíptica, hiperbólica o esférica) parecen ser válidas cada una de las siguientes proposiciones:

5. Dos rectas diferentes cualesquiera se cortan a lo sumo en un punto.

6. Dos rectas diferentes cualesquiera se cortan al menos en un punto.

7. Las rectas paralelas son equidistantes. (En geometría hiperbólica dos rectas son paralelas si tienen en común un punto del círculo fijo).

8. Las rectas paralelas existen.

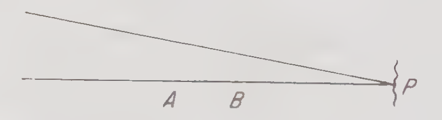
9. Las rectas paralelas existen, y dos rectas cualesquiera diferentes que son paralelas a una tercera recta, son paralelas entre sí.

10. Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

11. Dos rectas perpendiculares a una tercera no se cortan.

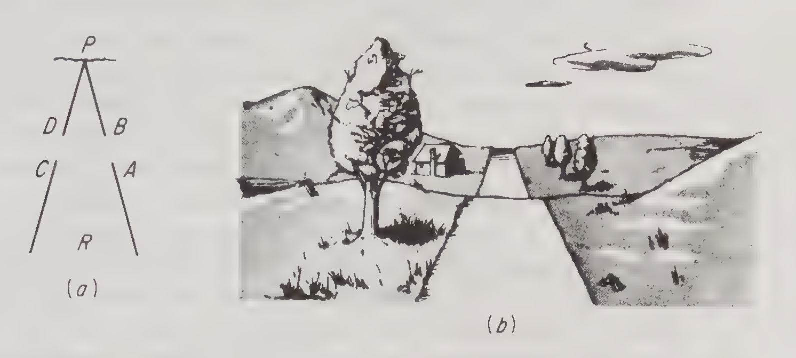
10-4 GEOMETRIA PROYECTIVA

Los griegos sabían que las líneas rectas a veces no parecen ser rectas. Por ejemplo, sabían que si las aristas de la escalinata de un templo, como el Partenón, tenían que parecer rectas, era entonces preciso darles cierta curvatura. El mismo fenómeno se observa cuando se camina a lo largo de un camino llano y recto y se observa que los bordes del camino parecen juntarse en un punto P del horizonte.



Quizá también se han observado caminos que son rectos pero no llanos. Entonces, considerando que la parte comprendida entre A y B está detrás de un monte y el resto del camino es visible, los bordes del camino se ven como en la figura adjunta. El cambio aparente del ancho del camino entre AC y BD hace posible

que una persona en R caminando a lo largo del camino pueda calcular la distancia de A a B.

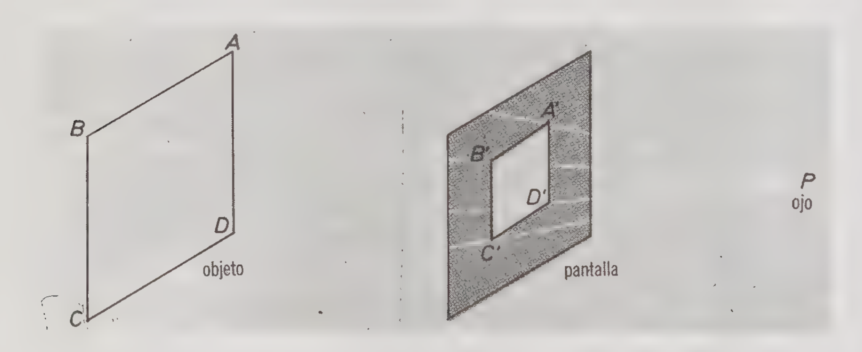


Durero: El dibujante del hombre sentado

Los artistas del Renacimiento consideraron los puntos del horizonte como puntos de fuga y desarrollaron un método de *perspec-*

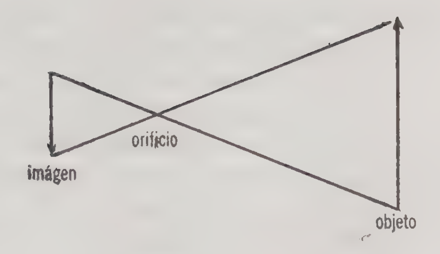
tiva focal que les permitía pintar sus obras de una forma más realista; es decir, les permitía pintar un mundo de tres dimensiones sobre un lienzo de dos. Podemos formarnos una idea del uso que se hacía de las matemáticas, a través de los párrafos iniciales del *Trattato della Pittura* de Leonardo de Vinci: "Nadie que no sea matemático lea mi obra". Los artistas de finales del siglo XV se dieron cuenta de que la perspectiva debía estudiarse científicamente y de que esto sólo se podía hacer mediante la geometría.

Alberti, Leonardo de Vinci, Durero (1471-1528) y otros, consideraban el lienzo del artista como una pantalla de cristal, a través de la cual éste observaba el objeto o paisaje que quería pintar. Como se ve en el grabado al pie de la página 373, el artista mantenía fija la posición de un ojo, y mirando sólo por este ojo, consideraba las visuales a cada uno de los puntos de la escena. Señalaba los puntos de intersección de las visuales con la pantalla de cristal. Estos puntos producen sobre el ojo la misma impresión que la propia escena. Al conjunto de las líneas dirigidas desde el ojo al objeto le damos el nombre de *proyección;* al conjunto de los puntos sobre la pantalla le damos el nombre de *sección* de la proyección.

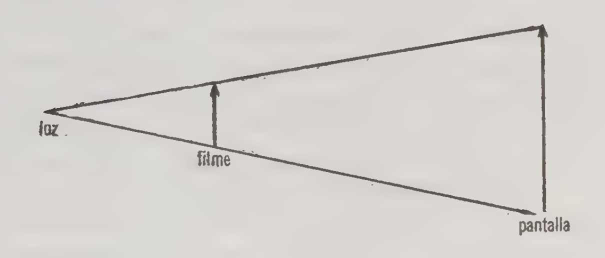


Obsérvese que cada uno de los puntos A, B, C y D del objeto o escena que se pretende pintar está sobre la misma línea determinada por (es colineal con) el punto P (posición del ojo) y un punto correspondiente A', B', C' y D' de la pantalla. Se dice que las dos figuras $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son *perspectivas* desde el punto P.

Las figuras perspectivas se emplean también hoy en día de muchas formas. Si para retratar utilizamos una cámara oscura (con un orificio en sustitución de la lente fotográfica), vemos que la imagen sobre la película es perspectiva con el objeto o escena fotografiado. El objeto y su imagen son perspectivos respecto al orificio de la cámara.



También se pueden ilustrar las proyecciones considerando la proyección de una diapositiva o de una película. Considérese un foco puntual de luz y obsérvese que la imagen sobre la película y la imagen sobre la pantalla son perspectivas respecto al foco de luz.



Los artistas del Renacimiento podían imaginar sus lienzos como transparentes, pero en realidad no lo eran. Por otra parte, muchas de las veces querían pintar escenas de su propia imaginación. Por ello fue necesario desarrollar los principios del sistema de la perspectiva focal. Dichos principios proporcionaron las bases para una geometría basada en proyecciones, la cual recibe el nombre de *geometría proyectiva.* Los postulados (reglas) para la geometría proyectiva son relativamente simples y los teoremas de gran utilidad para los artistas, delineantes, cartógrafos, fotógrafos, matemáticos y para muchos otros. No intentaremos desarrollar la teoría de la geometría proyectiva; nos limitaremos, para concluir esta sección, a señalar algunas de sus propiedades. La geometría proyectiva es una geometría muy general a partir de la cual pueden obtenerse, añadiendo postulados apropiados, la geometría euclidea o algunas de las geometrías no-euclideas.

Hemos visto cómo los artistas representan rectas paralelas me-

diante rectas que se cortan en puntos de fuga en el horizonte. La línea del horizonte es una línea ideal o una línea en el infinito en el sentido de que no es una línea de nuestro universo físico ni tampoco es una línea del plano euclideo. Así pues, en la geometría proyectiva se ha añadido una nueva línea al plano euclideo de tal forma que dos rectas coplanares cualesquiera se cortan. En otras palabras, dado que las rectas que se consideraron paralelas en la geometría euclidea ahora se cortan en esa nueva línea del horizonte, en la geometría proyectiva no existen rectas paralelas. Esto significa que la proposición:

Dos puntos cualesquiera del plano determinan una recta,

tiene ahora una proposición correspondiente.

Dos rectas cualesquiera del plano determinan un punto.

En general, cualquier proposición válida acerca de puntos y rectas en un plano en geometría proyectiva puede emplearse para obtener una proposición válida acerca de rectas y puntos, bastando para ello intercambiar las palabras "punto" y "recta". Esta propiedad de la geometría proyectiva plana se conoce como el **principio de dualidad en el plano.**

Hay un correspondiente **principio de dualidad** en el espacio en el que se establece que en la geometría proyectiva cualquier proposición válida acerca de puntos, rectas y planos, puede utilizarse para obtener una proposición válida acerca de planos, rectas y puntos intercambiando simplemente las palabras "punto" y "plano" y dejando en su lugar la palabra "recta". Dado que en la geometría proyectiva no existen paralelas:

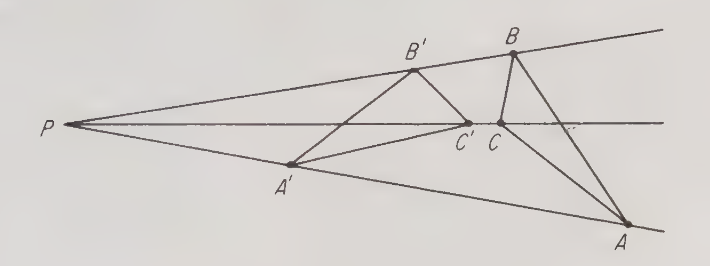
Dos puntos cualesquiera están sobre una recta.
Dos planos cualesquiera están sobre una recta.

Igualmente:

Tres puntos cualesquiera están al menos sobre un plano.
Tres planos cualesquiera determinan al menos un punto.

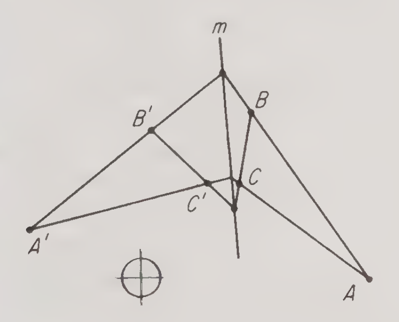
Como lo describieron los artistas del Renacimiento, dos figuras son **perspectivas respecto a un punto** P si las rectas que pasan por los vértices correspondientes de las figuras, todas pasan por el punto P. Por ejemplo, el triángulo ABC es perspectivo respecto a P

con el triángulo $A'B'C'$ dado que las rectas AA', BB' y CC' pasan todas ellas por P.



Ahora aplicaremos el principio de dualidad en el plano y la definición de figuras perspectivas respecto a un punto, para definir figuras en perspectiva respecto a una recta.

Dos figuras **son perspectivas respecto a una recta** m si los puntos de intersección de los lados correspondientes de las figuras están todos sobre m. Por ejemplo, el triángulo ABC es perspectivo respecto a m con el triángulo $A'B'C'$ dado que los puntos $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$ y $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$ están todos sobre m.

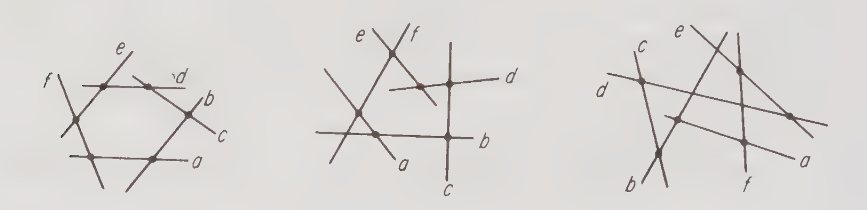


En un estudio detallado de geometría proyectiva podríamos demostrar el **teorema de Desargues:** si dos triángulos son perspectivos respecto a un punto, son perspectivos respecto a una recta y recíprocamente. (Ver Ejercicios 8 y 9).

Concluimos esta sección con una breve descripción de otros dos teoremas de la geometría proyectiva. Obsérvese que en los teoremas de geometría proyectiva intervienen rectas e intersecciones de rectas, pero no intervienen medidas de distancias.

Se define un **exágono** como una figura plana que consta de seis

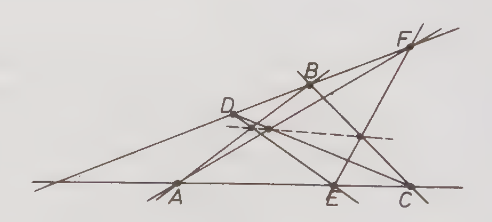
rectas *a, b, c, d, e* y *f,* de las cuales ninguna terna está sobre el mismo punto, y de los seis puntos (vértices) $a \cap b$, $b \cap c$, $c \cap d$, $d \cap e$, $e \cap f$ y $f \cap a$ que se obtienen considerando las intersecciones de las rectas en orden cíclico. Obsérvese que un exágono puede aparecer de diversas formas:



Los dos últimos teoremas que expondremos son relativos a los puntos diagonales de los exágonos inscritos en rectas que se cortan o en una cónica (es decir, en una circunferencia, en una parábola, en una elipse o en una hipérbola). Los lados *a* y *d, b* y *e, c* y *f* de cualquier exágono *abcdef* se llaman **lados opuestos.** Los tres puntos de intersección de los pares de lados opuestos de un exágono son sus **puntos diagonales.** (Recuérdese que en geometría proyectiva dos rectas cualesquiera de un plano deben de cortarse). Se dice que un exágono está **inscrito** en una figura si los vértices del exágono son puntos de la figura.

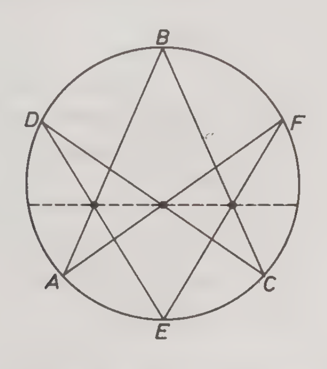
Cada uno de los siguientes teoremas puede demostrarse en geometría proyectiva. Por nuestra parte sólo consideraremos figuras que ilustran dichos teoremas.

Teorema de Pappus: Si un exágono está inscrito en dos rectas que no son rectas del exágono, entonces los puntos diagonales del exágono son colineales. (En la figura el exágono *ABCDEF* está inscrito en las rectas que se cortan *m* y *m';* la recta que pasa por los puntos diagonales aparece punteada.)



Teorema de Pascal: Si un exágono está inscrito en una cónica, entonces los puntos diagonales del exágono son colineales. (En la

figura, el exágono *ABCDEF* está inscrito en una circunferencia; la recta que pasa por los puntos diagonales aparece punteada.)



EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 10-4

1. Escribir la proposición dual en el plano de la siguiente proposición: Dos rectas diferentes cualesquiera en el mismo plano determinan un punto y sólo uno.

2. Escribir la proposición dual en el espacio de la proposición dada en el Ejercicio 1.

3. Escribir la proposición dual en el plano de la proposición que se obtuvo como resultado del Ejercicio 1.

4. Escribir la proposición dual en el espacio de la proposición que se obtuvo como resultado del Ejercicio 1.

5. La figura consistente en cuatro puntos (vértices) coplanares, de los cuales ninguna terna está sobre la misma recta, y en las seis rectas (lados) determinadas por ellos se llama cuadrángulo plano completo. Dibújese un cuadrángulo plano completo y desígnense los puntos dados por *A, B, C* y *D*.

6. El dual en un plano de un cuadrángulo completo es un cuadrilátero completo. Utilícese la dual en el plano de la definición dada en el Ejercicio 5 para obtener una definición de cuadrilátero completo.

7. Dibújese un cuadrilátero completo y señálense las rectas dadas *a, b, c* y *d*.

8. (a) Dibújense los triángulos RST y $R'S'T'$ perspectivos respecto a un punto M. (b) En el dibujo muéstrese que existe una recta m tal que los triángulos están también en perspectiva respecto a m.

9. (a) Dibújense los triángulos XYZ y $X'Y'Z'$ perspectivos respecto a una recta t. (b) En el dibujo muéstrese que existe un punto T tal que los triángulos son también perspectivos respecto a T.

10. Hacer una figura para el teorema de Pappus.

11. Hacer una figura para el teorema de Pascal.

10-5 UNA GEOMETRIA FINITA

Consideraremos ahora una geometría proyectiva finita; es decir, una geometría proyectiva con sólo un número finito de elementos. En esta geometría habrá dos tipos de elementos no definidos y una relación no definida entre esos elementos. Llamaremos a los elementos del primer tipo de elementos no definidos, estudiantes de una cierta clase; llamaremos a los elementos del segundo tipo de elementos no definidos, comités. Describiremos la relación no definida diciendo que un estudiante está en (o es miembro de) un comité. Utilizaremos letras mayúsculas $A, B, C \ldots$ para representar estudiantes y columnas de letras para representar comités. Ahora damos los postulados de nuestra geometría de estudiantes y comités:

I.—Existe al menos un comité.
II.—Cada comité consta al menos de tres miembros.
III.—Ningún comité tiene más de tres miembros.
IV.—Dos estudiantes cualesquiera están juntos al menos en un comité.
V.—Dos estudiantes distintos cualesquiera están juntos a lo sumo en un comité.
VI.—No todos los estudiantes son miembros del mismo comité.
VII.—Dos comités cualesquiera tienen al menos un miembro en común.

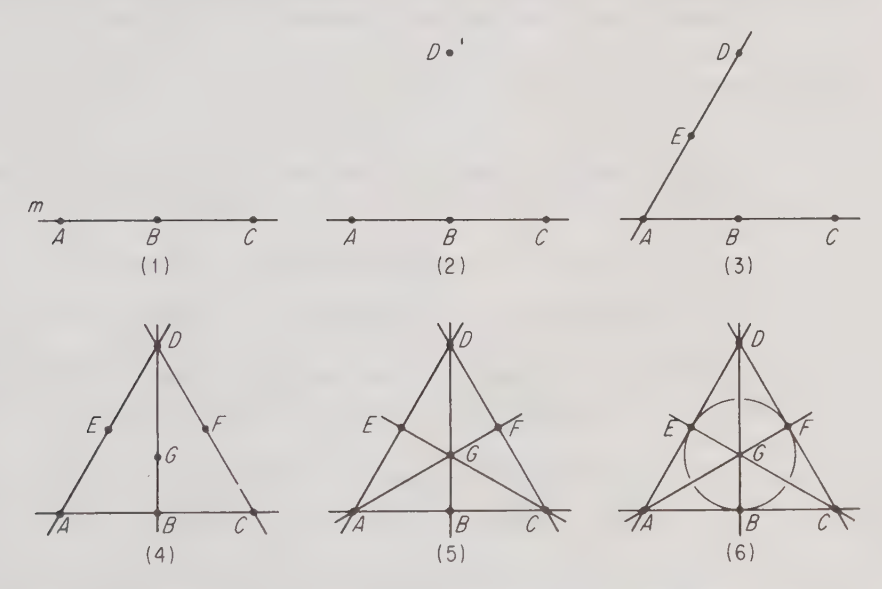
Podemos utilizar los Postulados I-VII para determinar el número de estudiantes en la clase y la estructura del comité de la clase. Por los Postulados I y II existe al menos un comité con al

menos tres miembros *A, B* y *C,* al que consideraremos como el comité

A
B
C

Por el Postulado III este comité no puede tener ningún otro miembro. Por el Postulado VI debe existir un estudiante *D* que no forma parte de este comité. Por los Postulados IV y V el estudiante *D* debe formar parte de un comité con cada uno de los estudiantes *A, B* y *C*. El comité del que forman parte *A* y *D* juntos debe tener un tercer miembro (Postulado II) y (por el Postulado V) el tercer miembro no puede ser ni *B* ni *C*. Por consiguiente el tercer miembro debe ser un quinto estudiante, *E*.

El análisis anterior puede continuarse para determinar por completo la estructura de los comités de la clase. (Véanse los Ejercicios 1-44 para la determinación de dicha estructura en términos de puntos y líneas). Concluimos el presente estudio con una serie de figuras en las cuales los estudiantes están representados por puntos y los comités por conjuntos colineales de puntos que no tienen que estar necesariamente sobre una misma recta. Las figuras se dan para



ilustrar la sucesión de pasos utilizados en los ejercicios, para demostrar que hay exactamente siete puntos y siete rectas en la geometría que se obtiene al enunciar los siete postulados en términos de puntos y líneas:

I. Existe al menos una línea.
II. Cada línea tiene al menos tres puntos.
III. Ninguna línea tiene más de tres puntos.
IV. Dos puntos cualesquiera están ambos al menos en una línea.
V. Dos puntos diferentes cualesquiera pertenecen ambos a lo sumo a una línea.
VI. No todos los puntos pertenecen a la misma línea.
VII. Dos líneas cualesquiera tienen al menos un punto en común.

Obsérvese que cada uno de los siete postulados es una proposición correcta para los siete puntos y las siete líneas de la Figura 6, una de cuyas líneas aparece como un óvalo. En un curso más avanzado esta geometría finita bi-dimensional de 7 puntos y 7 líneas puede ampliarse a una geometría finita tri-dimensional de 15 puntos, 35 líneas y 15 planos.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 10-5

Utilizando los siete postulados enunciados para puntos y líneas, demostrar cada una de las siguientes proposiciones en el orden dado:

1. Existe una línea m. (Ver Figura 1.)

2. La línea m tiene al menos tres puntos que llamaremos A, B y C.

3. La línea m no tiene más puntos que A, B y C.

4. La línea m tiene exactamente tres puntos.

5. Existe un punto D que no está en AB; es decir, que no está en la línea que pasa por A y B (Ver Figura 2).

6. Existe una línea AD (Ver Figura 3).

7. Existe un tercer punto E en la línea AD.

8. $E \neq B$; es decir, el punto E es diferente del punto B.

9. $E \neq C$ y por lo tanto E es un quinto punto del conjunto.

10. Existen líneas DB y DC (Ver Figura 4).

11. Existe un tercer punto G sobre DB y un tercer punto F sobre DC.

12. $F \neq A$.

13. $F \neq B$.

14. $F \neq E$ y por lo tanto F es un sexto punto del conjunto.

15. $G \neq A$.

16. $G \neq C$.

17. $G \neq E$.

18. $G \neq F$ y por lo tanto G es un séptimo punto del conjunto.

19. Existe una línea AF (Ver Figura 5).

20. Las líneas AF y DB tienen que tener un punto P en común.

21. $P \neq B$.

22. $P \neq D$.

23. P debe coincidir con uno de los puntos B, D o G y por consiguiente P coincide con G; es decir, AF y DB están ambos sobre G.

24. Existe una línea CE.

25. Las líneas CE y AF tienen que tener un punto S en común.

26. $S \neq A$.

27. $S \neq F$.

28. $S = G$; es decir, CE y AF ambas están sobre G.

29. Existe una línea EF (Ver figura 6).

30. Las líneas EF y AC tienen que tener un punto R en común.

31. $R \neq A$.

32. $R \neq C$.

33. $R = B$; es decir, las líneas AC y EF están ambas sobre B.

34. Si existiese un octavo punto H, existiría una línea AH.

35. La línea AH cortaría a la línea BD en un punto O.

36. $O \neq B$.

37. $O \neq D$.

38. $O \neq G$.

39. AH no puede cortar a BD.

40. No puede existir una línea AH.

41. No puede existir un octavo punto H y por consiguiente el conjunto consta exactamente de siete puntos que hemos llamado A, B, C, D, E, F y G.

42. Existen al menos siete líneas, como se muestra en las siguientes columnas

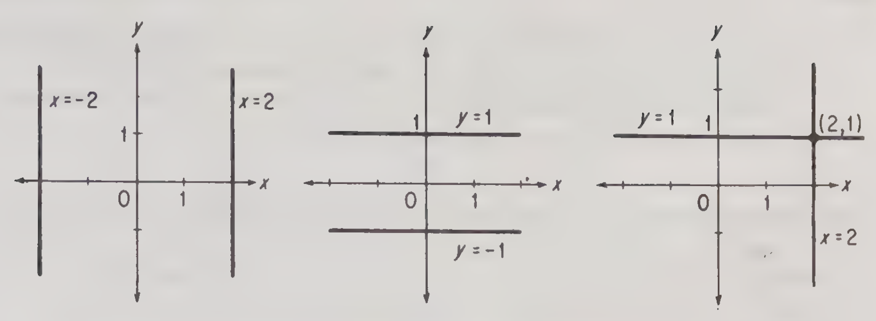
A	A	B	C	A	C	E
B	D	D	D	F	E	F
C	E	G	F	G	G	B

43. Existen exactamente siete puntos y siete líneas.

44. Al enunciarse los siete postulados en términos de estudiantes y comités, hay siete estudiantes en la clase y siete comités.

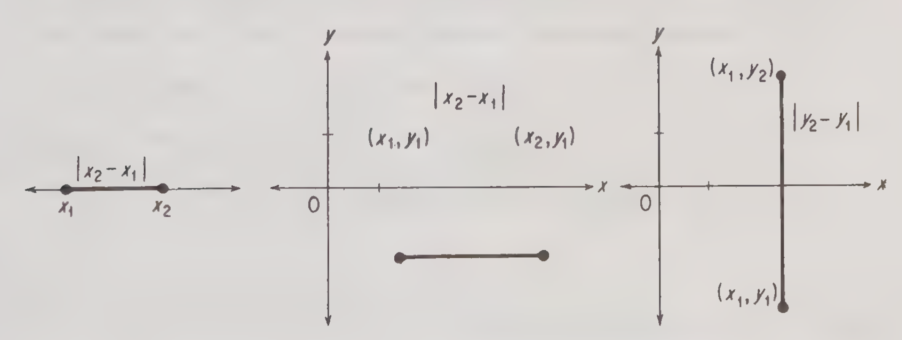
10-6 GEOMETRIA ANALITICA

Cada punto de una recta en geometría euclidea tiene un número real como coordenada; cada número real tiene un punto que lo representa sobre una recta euclidea (§5-6). En el Capítulo 5 se utiliza una recta numérica para ayudar a la comprensión de las propiedades de los conjuntos de números. En el Capítulo 7 se utilizó una recta numérica para representar gráficamente proposiciones en una variable; después se utilizó un plano coordenado cartesiano para representar gráficamente proposiciones en dos variables y para comprender mejor las relaciones, funciones y relaciones inversas. Ahora utilizaremos un plano coordenado para comprender mejor las propiedades de las figuras geométricas.



En el estudio de la geometría la localización de cualquier punto (x, y) sobre un plano coordenado puede hacerse tras introducir el concepto de rectas paralelas y dar una unidad de medida. Por ejemplo, los puntos que están a una unidad del eje x están sobre las rectas $y = 1$ y $y = -1$ paralelas al eje x. Los puntos que están a dos unidades del eje y están sobre las rectas $x = 2$ y $x = -2$ paralelas al eje y. El punto $(2, 1)$ está en la intersección de las rectas $x = 2$ y $y = 1$.

Dos puntos cualesquiera que tengan la misma primera coordenada están sobre la misma recta paralela al eje y; dos puntos cualesquiera que tengan la misma segunda coordenada están sobre la misma recta paralela al eje x. Las rectas paralelas al eje y tienen ecuaciones de la forma $x = k$; las rectas paralelas al eje x tienen ecuaciones de la forma $y = n$. Cada recta es un lugar geométrico, es decir, un conjunto de puntos que satisfacen una condición dada. Los puntos (k, n) se localizan como intersección de dichos lugares geométricos. A la coordenada x se le da el nombre de **abscisa** del punto y a la coordenada y se le da el nombre de **ordenada** del punto.



La distancia del origen a un punto $(x, 0)$ sobre el eje x puede expresarse como $|x|$ o como $|x - 0|$. También la longitud de cualquier segmento de recta sobre el eje x con puntos extremos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ puede expresarse como $|x_2 - x_1|$. Sobre el plano co-

ordenado, la longitud de cualquier segmento de recta con puntos extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_1) puede expresarse como $|x_2 - x_1|$; la longitud de cualquier segmento de recta con puntos extremos (x_1, y_1) y (x_1, y_2) puede expresarse como $|y_2 - y_1|$.

EJEMPLO: Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4, -1)$ y $(7, -1)$ así como la distancia entre dichos puntos.

Solución: Cada uno de los puntos tiene por ordenada -1. Por consiguiente la ecuación de la recta es $y = -1$. La longitud del segmento es $|7-4|$; es decir, 3.

Los ejercicios que siguen ilustran todos estos conceptos. Obsérvese que este material se presta mucho a nuevas investigaciones, a nuevas conjeturas y a nuevos descubrimientos. Obsérvese también que pueden establecerse nuevas relaciones entre puntos al determinar si tres puntos con coordenadas dadas son colineales. Por ejemplo, consideremos tres puntos A, B y C en línea recta. Se dice que el punto B está **entre** A y C si las longitudes de los segmentos de recta satisfacen la ecuación $AB + BC = AC$.

Es reciente la definición del concepto de "entre". Puede definirse para puntos por medio de longitudes de segmentos de recta tal como se acaba de hacer. También se puede definir utilizando la intersección de dos rayos. Como se indicó en la sección 6-1, dos puntos A y B determinan una recta $\overleftrightarrow{AB}$. Determinan también un rayo $\overrightarrow{AB}$ y un rayo $\overrightarrow{BA}$. La intersección de esos dos rayos es el segmento de recta $\overline{AB}$. Dicho segmento de recta consta de dos puntos extremos A y B y de los puntos *entre* A y B.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 10-6

Localizar en el mismo plano coordenado:

1. $(2, 5)$

2. $(-2, 5)$

3. $(-3, -4)$

4. $(3, -4)$

5. $(0, -2)$

6. $(-3, 0)$

7. $(5, -2)$

8. $(-2, -3)$

Trazar unos ejes coordenados, representar gráficamente cada uno de los siguientes lugares geométricos y determinar su ecuación:

9. Los puntos a 2 unidades por encima del eje x.

10. Los puntos a 3 unidades a la izquierda del eje y.

11. Los puntos a 2 unidades del origen y sobre el eje x.

12. Los puntos cuyas coordenadas son iguales.

Sobre un plano coordenado, representar gráficamente cada una de las siguientes ecuaciones o desigualdades y dar las coordenadas de tres puntos cualesquiera de la gráfica:

13. $y = 2$

14. $x = -3$

15. $x = y$

16. $x + y = 1$

17. $y = 2x - 1$

18. $x > 3$

19. $x > 3$ y $y < 4$

***20.** $|x| + |y| = 1$

***21.** $|x - y| < 1$

***22.** $|x - 2y| \leq 1$

Determinar la ecuación de la recta y las longitudes de los segmentos determinados por cada uno de los siguientes pares de puntos:

23. $(-3, 2)$ y $(-3, 7)$.

24. $(2, 1)$ y $(2, 5)$.

25. $(-3, 2)$ y $(-7, 2)$.

26. $(2, 1)$ y $(5, 1)$.

27. $(-1, -3)$ y $(5, -3)$.

28. $(5, -2)$ y $(5, 7)$.

10-7 FORMULA DEL PUNTO MEDIO

La fórmula del punto medio de un segmento determinado por dos puntos dados cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se deduce aplicando el hecho de que si tres rectas paralelas intersectan segmentos iguales en una transversal, entonces intersectan segmentos iguales en

cualquier transversal. Necesitamos primero poder determinar el punto medio de un segmento de recta sobre un eje coordenado, es decir, sobre una recta numérica.



Consideremos los puntos con coordenadas 5 y 11 sobre una recta numérica; la longitud del segmento determinado por ellos es 11-5, es decir, 6. El punto medio del segmento tiene por coordenada $5 + \frac{1}{2}(6)$, es decir, 8. Obsérvese que $8 = \frac{1}{2}(5 + 11)$. Los puntos con coordenadas 3 y -5 sobre una recta numérica determinan un segmento de recta de longitud $3 - (-5)$, es decir, 8; el punto medio tiene por coordenada $-5 + \frac{1}{2}(8)$, es decir, -1. Obsérvese que $-1 = \frac{1}{2}(-5 + 3)$.

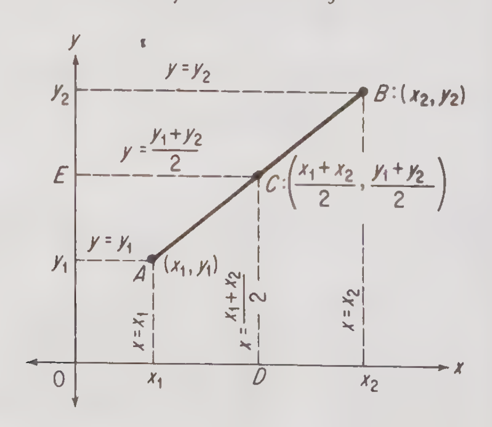
Supongamos que R y S son puntos de una recta numérica con coordenadas r y s. Entonces el segmento de recta $\overline{RS}$ tiene por longitud $|r - s|$. Cuando $r < s$, como en la figura, la longitud es $s - r$; el punto medio tiene por coordenada $r + \frac{1}{2}(s - r)$ es decir, $\frac{1}{2}(r + s)$, dado que

$$r + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s.$$

Esta fórmula es válida para dos puntos cualesquiera R y S sobre una recta numérica.



Ahora consideremos dos puntos cualesquiera A: (x_1, y_1) y B: (x_2, y_2) en un plano coordenado. La recta que pasa por A y es paralela al eje y tiene por ecuación $x = x_1$ y corta al eje x en el



punto $(x_1, 0)$; la recta que pasa por B y es paralela al eje y tiene por ecuación $x = x_2$ y corta al eje x en $(x_2, 0)$. Estos puntos con coordenadas x_1 y x_2 sobre el eje x determinan un segmento de recta; el punto medio D de dicho segmento de recta tiene por abscisa $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. La recta que pasa por D y es paralela al eje Y tiene por ecuación $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Obsérvese que las tres rectas paralelas

$$x = x_1, \qquad x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad \text{y} \qquad x = x_2$$

intersectan segmentos iguales en el eje x; por consiguiente, intersectarán segmentos iguales en la recta AB. En otras palabras, la recta $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ pasa por el punto medio C del segmento de recta $\overline{AB}$, y C tiene por abscisa $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

En forma análoga, las rectas que pasan por A y B y son paralelas al eje x tienen por ecuaciones $y = y_1$ y $y = y_2$. Esas rectas cortan al eje y en los puntos $(0_1, y_1)$ y $(0_1, y_2)$; determinan un segmento de recta cuyo punto medio es el $\left(0, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Las tres rectas paralelas

$$y = y_1, \qquad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad \text{y} \qquad y = y_2$$

intersectan segmentos iguales sobre el eje y y por consiguiente intersectan segmentos iguales en las rectas AB. En otras palabras, la recta $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ pasa por el punto medio C del segmento de recta $\overline{AB}$, teniendo C por ordenada $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.

Queda ahora totalmente deducida la **fórmula del punto medio:** Cualquier segmento de recta con puntos extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene por punto medio

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Obsérvese que después de haber introducido el plano coordenado, la fórmula del punto medio puede deducirse sin consideraciones adicionales. Su deducción se basa en el siguiente teorema: Si tres rectas paralelas intersectan segmentos iguales en una transversal, entonces intersectarán segmentos iguales en cualquier transversal. Las aplicaciones de la fórmula del punto medio se consideran en los siguientes ejemplos y en los ejercicios que siguen.

EJEMPLO 1: Determinar el punto del segmento cuyos puntos extremos son (2, 7) y (8, —3).

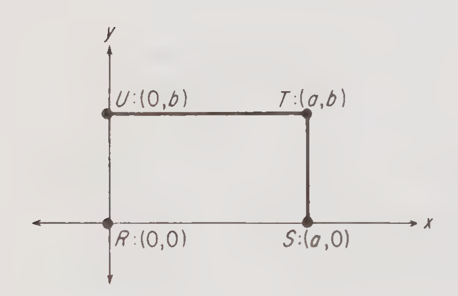
Solución:

$$\frac{2+8}{2} = 5; \quad \frac{7+(-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

El punto medio es (5, 2).

EJEMPLO 2: Representar la figura sobre un plano coordenado y demostrar que las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio.

Solución: Un rectángulo puede representarse en un plano coordenado con vértices: $R\,(0, 0)$, $S\,(a, 0)$, $T\,(a, b)$ y $U\,(0, b)$.



Entonces el punto medio de $\overline{RT}$ es $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$; es decir, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. De igual modo, el punto medio de $\overline{US}$ es $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Por consiguiente, las dos diagonales tienen el mismo punto como medio. Así pues, cada una de las diagonales, contiene el punto medio de la otra y por consiguiente se cortan en sus puntos medios.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 10-7

Determinar el punto medio de cada uno de los siguientes segmentos cuyos puntos extremos se dan:

1. (1, 2) y (3, 8).
2. (2, —3) y (4, 7).
3. (—5, 4) y (3, —2).
4. (—3, —7) y (5, 9).

5. Cada uno de los siguientes conjuntos de coordenadas representa los vértices de un triángulo que puede ser rectángulo, isósceles o un triángulo cualquiera. Identificar cada uno de ellos:

(**a**) (0, 0), (3, 0), (0, 5).
(**b**) $(-1, 0)$, (1, 0), (0, 2).
(**c**) (0, 0), $(a, 0)$, $(0, b)$.
(**d**) $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$.
(**e**) $(0, -3)$, (2, 4), $(-2, 4)$.

6. Cada uno de los siguientes conjuntos de coordenadas representa los vértices de un cuadrado, un rectángulo no cuadrado o un paralelogramo no rectángulo. Identificar cada uno de ellos:

(**a**) (0, 0), (5, 0), (5, 5), (0, 5).
(**b**) $(-1, 0)$, (3, 0), (3, 2), $(-1, 2)$.
(**c**) (0, 0), $(a, 0)$, (a, a), $(0, a)$.
(**d**) (0, 0), $(a, 0)$, (a, b), $(0, b)$, $b \neq a$.
(**e**) (0, 0), (6, 0), (8, 3), (2, 3).
(**f**) $(2, -1)$, (2, 3), $(-1, 3)$, $(-1, -1)$.
(**g**) (0, 0), $(a, 0)$, $(a + b, c)$, (b, c).

7. Un segmento $\overline{RS}$ tiene por punto extremo R: (1, 3) y por punto medio M: (2, 7). Determinar las coordenadas de S.

8. Repetir el Ejercicio 7 para R: (2, —5) y M: (5, —8).

9. Los puntos A: (0, 0) y B: (5, 0) son los vértices de un rectángulo. Determinar las coordenadas de los otros vértices de dos rectángulos de lado $\overline{AB}$.

10. Repetir el Ejercicio 9 para A: (0, 0) y B: $(a, 0)$, $a \neq 0$.

11. Los puntos A: (0, 0) y B: (2, 0) son los vértices de un cuadrado. Determinar las coordenadas de los otros vértices de: (a) un

cuadrado de lado $\overline{AB}$; **(b)** un segundo cuadrado de lado $\overline{AB}$; **(c)** un cuadrado de diagonal $\overline{AB}$.

12. Repetir el Ejercicio 11 para A: $(0, 0)$ y B: $(-6, 0)$.

13. Repetir el Ejercicio 11 para A: $(0, 0)$ y B: $(2a, 0)$, $a \neq 0$.

Representar la figura en el plano coordenado y demostrar:

14. El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

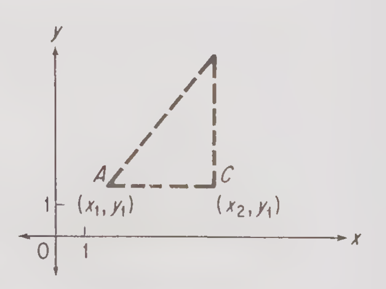
15. La mediana de un trapecio es paralela a las bases e igual a la semi suma de ellas.

16. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.

17. Los segmentos determinados por los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se cortan en sus puntos medios.

10-8 PENDIENTE DE UNA RECTA

Dados dos puntos cualesquiera A: (x_1, y_1) y B: (x_2, y_2), o bien la recta AB es paralela a uno de los ejes coordenados o de lo contrario se puede determinar un triángulo rectángulo ABC con catetos paralelos a los ejes coordenados considerando el punto C: (x_2, y_1) como el tercer vértice. Entonces los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ tienen longitudes $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$.



La razón $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ de los segmentos dirigidos $\overline{CB}$ y $\overline{AC}$ se define como la pendiente del segmento de recta $\overline{AB}$.

La pendiente tiene importancia como propiedad de rectas más que como propiedad de segmentos de recta. Dos puntos cualesquiera A: (x_1, y_1) y B: (x_2, y_2) determinan la recta AB. Esa recta es paralela al eje y si y sólo si $x_2 = x_1$. Si $x_2 = x_1$, la razón $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ no se define, dado que no se puede dividir por cero. Si $x_2 \neq x_1$ la razón $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ está definida para puntos cualesquiera A y B de la recta. Se requieren propiedades de figuras semejantes para demostrar que la razón $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ tiene el mismo valor cualesquiera que sean los puntos A y B que se elijan de la recta. Dicho valor es la **pendiente** m de la recta y se escribe

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

EJEMPLO 1: Determinar la pendiente de la recta que pasa por $(2, 3)$ y $(5, -2)$.

Solución:

$$\frac{-2 - 3}{5 - 2} = -\frac{5}{3}.$$

La pendiente es $-5/3$.

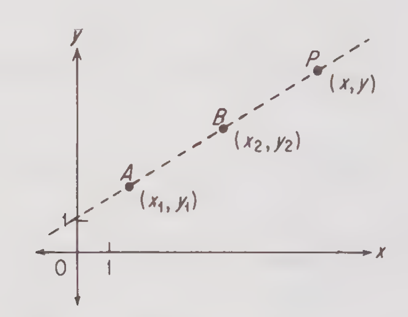
Obsérvese que la pendiente se define para cualquier recta que no sea paralela al eje y; la pendiente de cualquier recta paralela al eje x es cero. Es costumbre introducir el concepto de pendiente para rectas que pasan por el origen; después se define de un modo general, tal como lo hemos hecho; se demuestra después que, para rectas que no son paralelas al eje y, dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Ahora se puede encontrar la ecuación de cualquier recta que esté "determinada". Consideraremos los siguientes casos:

1. Una recta que pase por dos puntos cualesquiera.
2. Una recta que pase por dos puntos sobre los ejes coordenados.
3. Una recta que pase por un punto dado cualquiera y que sea paralela a una recta dada.
4. Una recta que pase por un punto del eje y y que sea paralela a una recta dada.

Sean A: (x_1, y_1) y B: (x_2, y_2) dos puntos dados cualesquiera. Si $x_1 = x_2$, la recta AB tiene por ecuación $x = x_1$. Si $x_1 \neq x_2$, un punto P: (x, y) está en la recta AB si y sólo si la pendiente $\dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ $y_1/x - x_1$ del segmento de recta $\overline{AP}$ es igual a la pendiente $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ del segmento de recta $\overline{AB}$. Se tiene entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



como ecuación de la recta que pasa por dos puntos cualesquiera A: (x_1, y_1) y B: (x_2, y_2), $x_1 \neq x_2$. A esta ecuación se le da el nombre de **forma de dos puntos de la ecuación de la recta.**

EJEMPLO 2: Determinar la ecuación de la recta que pasa por $(2, 3)$ y $(5, -2)$.

Solución:

$$\frac{y - 3}{x - 2} = \frac{-2 - 3}{5 - 2}; \qquad \frac{y - 3}{x - 2} = -\frac{5}{3}.$$

La ecuación obtenida en el Ejemplo 2 puede escribirse de la forma

$$3(y - 3) = -5(x - 2);$$
$$5x + 3y - 19 = 0.$$

Toda ecuación de la forma

$$ax + by + c = 0,$$
a y b no ambos cero

se conoce como la **forma general** de la ecuación de la recta.

Sean A: $(a, 0)$ y B: $(0, b)$ dos puntos dados sobre los ejes coordenados. Si $a = 0$, A y B están ambos sobre el eje y y la recta AB tiene por ecuación $x = 0$. Si $a \neq 0$, la recta AB se compone de los puntos (x, y) tales que

$$\frac{y - 0}{x - a} = \frac{b - 0}{0 - a};$$

es decir, los puntos cuyas coordenadas satisfacen la forma de dos puntos de la ecuación de la recta. Esta ecuación se puede expresar en las formas

$$(-a)y = b(x) + (-a)b;$$

$$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1;$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

La última ecuación recibe el nombre de *forma simétrica* de la ecuación de la recta. El número a es la abscisa del punto en que la recta corta al eje x y se le da el nombre de *intersección* de la recta con el eje x. El número b es la ordenada del punto en el que la recta corta al eje y y se le da el nombre de *intersección* de la recta con el eje y. Obsérvese que una recta paralela a uno de los ejes coordenados no puede tener dos intersecciones y por lo tanto no puede escribirse en forma simétrica.

EJEMPLO 3: Determinar la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes x y y son respectivamente 3 y 7.

Solución:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1$$

Sean A: (x_1, y_1) un punto dado cualquiera y m la pendiente de una recta dada. Las coordenadas de los puntos P: (x, y) de la recta que pasa por A con pendiente m satisfacen la ecuación

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Cuando se escribe en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

La ecuación recibe el nombre de **forma punto-pendiente** de la ecuación de la recta.

Sean A: $(0, b)$ un punto cualquiera del eje y y m la pendiente de una recta dada. Entonces la forma de punto-pendiente de la ecuación es

$$y - b = m(x - 0)$$

que puede escribirse en la forma

$$y = mx + b.$$

Esta ecuación de la recta se conoce como la **forma pendiente-ordenada en el origen.** Obsérvese que se aplica la intersección con el eje y, es decir, la ordenada del punto en el que la recta corta al eje y.

EJEMPLO 4: Determinar la ecuación de la recta que pasa por (2, 3) y (5, —2) en la forma: (a) punto-pendiente; (b) pendiente-ordenada en el origen.

Solución: Como en el Ejemplo 2,

$$\frac{y-3}{x-2} = -\frac{5}{3}.$$

Se tiene por consiguiente

(a) $y - 3 = -\frac{5}{3}(x - 2)$;
(b) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3} + 3$; es decir, $y = -\frac{5}{3}x + 6\frac{1}{3}$.

En los ejercicios que siguen se aplican las cuatro formas anteriores de la ecuación de una recta. Obsérvese que, si la ecuación de una recta está dada en una de las formas, puede expresarse en cada una de las otras formas. Por ejemplo, la siguiente ecuación de la forma de dos puntos,

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{3-1}{2-1},$$

puede escribirse en la forma punto-pendiente como

$$y - 1 = 2(x - 1),$$

en la forma de pendiente-ordenada en el origen como

$$y = 2x - 1,$$

y en la forma simétrica como

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1.$$

Obsérvese también que para cualquier ecuación dada, es posible determinar tantos puntos de la recta como se deseen. Por ejemplo, si la ecuación es $y = 2x + 3$, entonces cada uno de sus puntos tienen coordenadas de la forma $(x, 2x + 3)$. Si $x = 1$, $y = —5$; si $x = —1$, $y = 1$; si $x = 5$, $y = 13$, etc. Cada uno de los puntos $(1, 5)$, $(—1, 1)$ y $(5, 13)$ pertenece a la recta cuya ecuación es $y = 2x + 3$. Dos cualesquiera de esos puntos pueden utilizarse para escribir la ecuación de la recta en la forma de dos puntos. Por ejemplo,

$$\frac{y-5}{x-1} = \frac{13-5}{5-1}.$$

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 10-8

1. Determinar la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados:

(a) $(1, 4)$ y $(5, 6)$. **(b)** $(2, -3)$ y $(6, 5)$.
(c) $(-2, -3)$ y $(4, 5)$. **(d)** $(3, 5)$ y $(-6, 11)$.

Para cada una de las rectas del Ejercicio 1 determinar:

2. La ecuación en forma punto-pendiente.

3. La ecuación en forma pendiente-ordenada en el origen.

4. La intersección con el eje y.

5. La intersección con el eje x.

6. La ecuación en forma simétrica.

Determinar la ecuación de la recta:

7. Que pasa por los puntos $(7, -11)$ y $(3, 1)$.

8. Que pasa por los puntos $(-5, -7)$ y $(-10, 3)$.

9. Que pasa por el punto $(0, -2)$ y tiene pendiente $3/2$.

10. Que pasa por el punto $(1, 3)$ y tiene pendiente -2.

11. Cuyas intercepciones con los ejes x y y son 5 y 4 respectivamente.

12. Cuyas intercepciones con los ejes x y y son 4 y -2 respectivamente.

13. Pasa por el origen y es paralela a la recta $y = 2x + 5$.

14. Pasa por el punto $(1, 2)$ y es paralela a la recta $y = -x$
7.

Considérese: **(a)** *que los ejes coordenados se han elegido de tal forma que ninguna de las rectas en discusión sea paralela al eje y, y* **(b)** *que dos rectas sobre un plano coordenado son paralelas si y sólo*

si tienen la misma pendiente. Demostrar cada una de las siguientes proposiciones para rectas sobre un plano coordenado:

15. Si dos rectas son paralelas a una tercera recta, son paralelas entre sí.

16. Si una recta corta a una de dos rectas paralelas, entonces también corta a la otra.

17. Si una recta es paralela a una de dos rectas que se cortan, entonces corta a la otra.

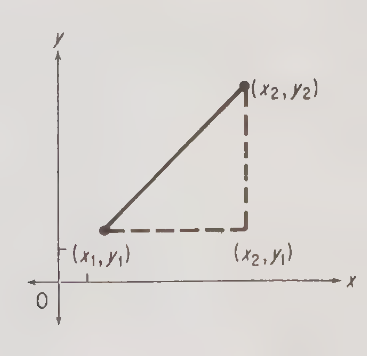
18. Dos rectas se cortan si son respectivamente paralelas a otras dos rectas que se cortan.

19. El cuadrilátero $ABCD$ con vértices A: $(0, 0)$, B: $(5, 7)$, C: $(7, 13)$ y D: $(2, 6)$ es un paralelogramo.

10-9 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Suponemos que el teorema de Pitágoras es conocido del lector y lo aplicaremos para la obtención de una fórmula general que nos dé la longitud de cualquier segmento de recta sobre un plano coordenado. Consideremos que los puntos extremos del segmento de recta tienen por coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Como en la sección 10-8, o bien el segmento de recta es paralelo a uno de los ejes coordenados o de lo contrario se puede formar un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto tiene por vértice el punto (x_2, y_1). Las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$; por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Esta es la **fórmula de la distancia entre dos puntos** del plano. Es válida también cuando el segmento de recta es paralelo a uno de los ejes coordenados, dado que

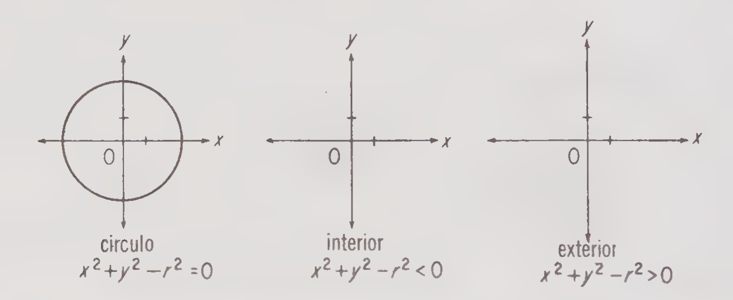
$$|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} \quad \text{y} \quad |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}.$$

EJEMPLO: Determinar la longitud del segmento cuyos puntos extremos son (2, 5) y (7, 3).

Solución:

$$\sqrt{(7-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

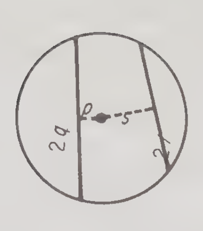
El estudio de la circunferencia puede hacerse ahora tanto desde un punto de vista sintético como analítico.

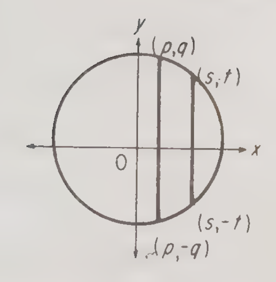


La fórmula de la distancia entre dos puntos puede aplicarse en la demostración de muchos teoremas comunes de la geometría analítica. Varios de ellos se consideran en los ejercicios. La demostración del siguiente teorema da la oportunidad de utilizar tanto desigualdades como ecuaciones.

De dos cuerdas desiguales de una circunferencia, la más larga es la más cercana al centro.

Consideremos como $2q$ y $2t$ las longitudes de las cuerdas, siendo $2q > 2t$. Sean p y s sus distancias respectivas al centro. El radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$ es r. Consideremos la cuerda con puntos extremos (p, q) y $(p, -q)$ y la cuerda con puntos extremos (s, t) y $(s, -t)$. Dichas cuerdas son iguales





a las cuerdas dadas, ya que en la misma circunferencia o en circunferencias iguales las cuerdas a igual distancia del centro, son iguales. El hecho de que los puntos extremos de las cuerdas están sobre la circunferencia queda establecido por $p^2 + q^2 = r^2$ y $s^2 + t^2 = r^2$. Por consiguiente, $p^2 + q^2 = s^2 + t^2$. Dado que $2q > 2t$, que p, q, s y t son distancias (es decir, no negativas), entonces $q > t$ y por lo tanto $q^2 > t^2$. Restando la desigualdad de la igualdad se tiene,

$$\begin{array}{rcl} p^2 + q^2 & = & s^2 + t^2 \\ q^2 & > & t^2 \\ \hline p^2 & < & s^2 \end{array}$$

siendo $p < s$ como se quería demostrar. Estas proposiciones requieren, claro está, de consideraciones previas sobre las desigualdades.

La fórmula de la distancia entre dos puntos hace posible clasificar los triángulos cuando se conocen las coordenadas de sus vértices. Un triángulo es isósceles si dos al menos de sus lados son iguales, equilátero, si los tres lados son iguales y es rectángulo si la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del tercer lado.

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 10-9

Determinar la longitud del segmento cuyos puntos extremos son:

1. (1, 3) y (4, 3).

2. (2, —1) y (2, 5).

3. (1, 3) y (4, 7).

4. (2, —3) y (7, 9).

5. (—1, 5) y (2, —3).

6. (—3, —4) y (—7, —15).

7. (7, 11) y (1, 3).

8. (—2, —3) y (6, 12).

Determinar la ecuación de la circunferencia dados:

9. Centro (1, 2) y radio 3.

10. Centro (2, —3) y radio 5.

Clasificar según sus lados los triángulos cuyos vértices son:

11. (4, 5), (3, 7) y (6, 6).

12. (—1, 15), (7, —12) y (—3, —5).

En los ejercicios 13 a 16, demostrar en el plano coordenado:

13. Una recta $x = p$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ si $p^2 = r^2$; es secante si $p^2 < r^2$; no intersecta a la circunferencia si $p^2 > r^2$.

14. Las diagonales de un rectángulo son iguales.

15. Un triángulo isósceles tiene dos medianas iguales.

16. La suma de los cuadrados de las distancias de cualquier punto P del plano de un rectángulo a los puntos extremos de una de las diagonales del rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias de P a los puntos extremos de la otra diagonal.

*17. En el espacio coordenado un punto queda determinado por tres coordenadas (x, y, z). La fórmula de la distancia entre dos puntos del espacio es

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Determinar la longitud del segmento cuyos puntos extremos son:
(a) (1, 0, 2) y (1, 4, 5);
(b) (2, 7, —3) y (1, 5, 0).

*18. Determinar la longitud del segmento cuyos puntos extremos son:

(a) (2, —1, 0) y (3, 1, 2);
(b) (1, 5, —6) y (—2, 3, 1).

*19. Determinar la ecuación de la esfera dados:

(a) centro (1, —2, 5) y radio 2;
(b) centro (2, 3, —4) y radio 5.

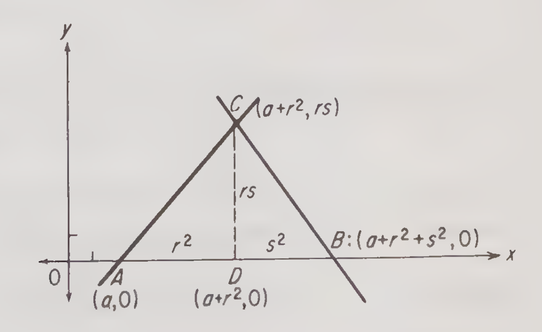
*20. Describir el conjunto de puntos en el espacio tales que:

(a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$;
(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

10-10 RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas sobre un plano coordenado son paralelas si y sólo si las dos son paralelas al eje y o si tienen la misma pendiente (§10-8). Ahora aplicaremos el teorema de Pitágoras para demostrar que si ninguna de dos rectas es paralela al eje x y las rectas son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es —1.

Consideremos dos rectas p y q sobre un plano coordenado. Si una al menos de las rectas es paralela al eje x, entonces las rectas son perpendiculares si y sólo si la otra recta es paralela al eje y. Si ninguna de las rectas es paralela al eje x, entonces cada una de ellas corta a dicho eje x. Supongamos que una de las rectas corta al eje x en A: $(a, 0)$ y la otra recta lo corta en B: $(b, 0)$ siendo $b > a$. Este supuesto implica que las rectas no se cortan sobre el eje x. Cuando las rectas se cortan sobre el eje x, o bien se elige un nuevo sistema coordenado cambiando el eje x o se puede hacer otra demostración considerando los puntos A y B sobre una recta $y = k$, $k \neq 0$.



Si $p \perp q$, llamemos C a su punto de intersección y tracemos la altura $\overline{CD}$ del triángulo ABC. Dado que $b > a$, podemos elegir $r > 0$ tal que $\overline{AD} = r^2$ y por consiguiente D tiene por coordenadas $(a + r^2, 0)$. Dado un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en C y altura $\overline{CD}$, sabemos que $\overline{CD}^2 = (\overline{AD})(\overline{DB})$, ya que la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional de los segmentos que determina sobre ella. Por lo tanto, podemos elegir s tal que $\overline{CD} = rs$ y $\overline{DB} = s^2$. Entonces se tiene

$$C: (a + r^2, rs) \quad \text{y} \quad B: (a + r^2 + s^2, 0),$$

según se indica en la figura. La pendiente de $\overleftrightarrow{AC}$ es

$$\frac{rs - 0}{(a + r^2) - a};$$

es decir, $\frac{s}{r}$. La pendiente de $\overleftrightarrow{BC}$ es

$$\frac{rs - 0}{(a + r^2) - (a + r^2 + s^2)};$$

es decir, $-\frac{r}{s}$. El producto de las pendientes de las dos rectas es

$$\frac{s}{r}\left(-\frac{r}{s}\right);$$

es decir, -1. Hemos demostrado que el producto de las pendientes de las rectas perpendiculares p y q es -1. Consideraremos como válido, sin demostración, el teorema recíproco: Si el producto de las pendientes de dos rectas es -1, entonces las rectas son perpendiculares.

EJEMPLO 1: Determinar la pendiente de una recta que sea perpendicular a la recta que pasa por $(2, 5)$ y $(-1, 7)$.

Solución: La recta m que pasa por $(2, 5)$ y $(-1, 7)$ tiene

pendiente $\frac{7-5}{-1-2}$; es decir, $-\frac{2}{3}$. Por consiguiente una recta perpendicular a m tiene pendiente $\frac{3}{2}$.

EJEMPLO 2: Determinar la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $y = 2x + 3$ en el punto $(1, 5)$.

Solución: La recta dada tiene pendiente 2. Por consiguiente la recta que se busca tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. La recta que pasa por $(1, 5)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$ tiene por ecuación

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 1).$$

EJERCICIOS RELATIVOS A LA SECCION 10-10

Determinar la pendiente de cualquier recta que sea perpendicular a la recta:

1. $y = 2x$ **2.** $y = \frac{3}{4}x + 5$

3. Que pasa por $(1, 5)$ y $(6, 7)$.

4. Que pasa por $(-1, -3)$ y $(3, 5)$.

Determinar la ecuación de la recta perpendicular a la recta:

5. $y = 3x$ y que pasa por el origen.

6. $y = -5x$ y que pasa por el origen.

7. $y = \frac{1}{2}x - 3$ y que pasa por $(0, -3)$.

8. $y = -2/5x + 4$ y que pasa por $(0, 4)$.

9. $y = 3x + 5$ y que pasa por $(-1, 2)$.

10. $x + y - 2 = 0$ y que pasa por $(1, 1)$.

11. $x + y - 6 = 0$ y que pasa por $(2, 4)$.

12. $2x - y + 5 = 0$ y que pasa por $(3, 1)$.

Suponiendo que las rectas no son paralelas a los ejes coordenados, demuéstrese que:

13. Una recta perpendicular a una de dos rectas paralelas es perpendicular a la otra.

14. Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas.

15. Dos rectas se cortan si son perpendiculares respectivamente a dos rectas que se cortan.

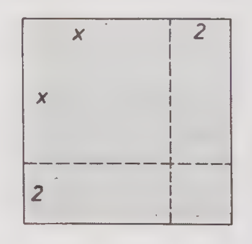
Hágase la correspondiente figura en el plano coordenado y demuéstrese que:

16. Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí.

***17.** Las alturas de un triángulo son concurrentes.

EXAMEN RELATIVO AL CAPITULO 10

1. Copiar la siguiente figura, escribir dentro de cada región el área que le corresponde y utilizar la figura para obtener una fórmula para $(x + 2)^2$.



2. ¿Es siempre posible en el espacio determinar:
(a) una recta perpendicular a cada uno de dos planos dados?
(b) una recta perpendicular a cada una de dos rectas coplanares?

3. En cada una de las dos geometrías no euclideas describir el comportamiento de dos rectas que son perpendiculares a una misma recta.

4. Enunciar la proposición dual de la siguiente: Dos puntos diferentes cualesquiera de un mismo plano determinan una recta única.

5. Determinar la ecuación de la recta que pasa por (—2, 3) y (4, 9) en la forma: **(a)** punto-pendiente; **(b)** pendiente-ordenada en el origen.

6. Determinar la longitud del segmento cuyos puntos extremos son: **(a)** (2, 5) y (6, 5); **(b)** (2, 5) y (6, 8).

7. Determinar el punto medio del segmento cuyos puntos extremos son: **(a)** (1, 7) y (5, 3); **(b)** (—1, 4) y (6, 4).

8. Determinar la pendiente de cualquier recta que sea perpendicular a la recta: **(a)** $y = 3x$; **(b)** $y = 2/3x - 4$.

9. Determinar la pendiente de cualquier recta que sea paralela a la recta: **(a)** $y = -\frac{1}{3}x + 6$; **(b)** que pase por (1, 2) y (5, —2).

10. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro (3, 5) y radio 2.

EPILOGO

Veinticinco siglos atrás, la aritmética (teoría de números), la geometría, la música y la astronomía eran los temas básicos del programa de estudio de los pitagóricos. En la Edad Media se añaden la gramática, la lógica y la retórica, considerándose esas siete artes liberales como esenciales para una persona cultivada. Las matemáticas siguen siendo una parte importante del conocimiento de toda persona preparada.

Hoy en día las matemáticas incluyen tópicos tales como la aritmética, la teoría de números, el álgebra, la geometría, la lógica, la probabilidad y la programación lineal, cuestiones que han sido tratadas en esta introducción a los conceptos matemáticos. Los conceptos sobre teoría de conjuntos han servido de tema unificador de todas estas cuestiones.

El estudio separado de la aritmética, del álgebra y de la geometría resulta desorientador, al dar la impresión de que se trata de temas independientes, cuando en realidad no son sino partes de un mismo tema —las matemáticas. Se ha visto que el álgebra se puede aplicar al estudio de la geometría como, por ejemplo, en el empleo de las coordenadas. De igual forma, la geometría se puede aplicar en el estudio del álgebra como, por ejemplo, en el empleo de la recta numérica. La estrecha relación entre el álgebra y la geometría se pone de manifiesto al observar que el álgebra de los números reales y la geometría de los puntos de una recta euclidea, son esencialmente lo mismo. Así los antiguos griegos representaban los números por medio de segmentos de recta, antes de que se desarrollaran notaciones más convenientes. Así pues, el álgebra y la geometría son diferentes formas o puntos de vista de abordar el estudio de las matemáticas.

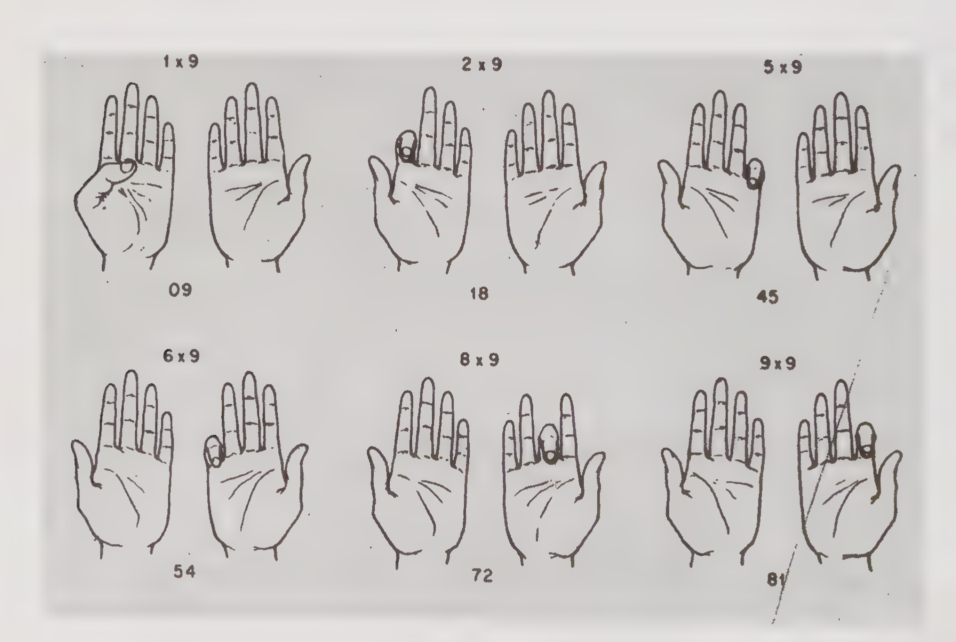
Las matemáticas constituyen un tema vivo en continuo y rápido desarrollo. En los últimos cincuenta años las matemáticas han avanzado lo que nunca habían avanzado en toda su historia. Las matemáticas están invadiendo también el desarrollo científico de nuestro tiempo, siendo necesario comprender los conceptos matemáticos básicos si queremos tener acceso a este avance científico. En este libro se ha pretendido ayudar a descartar el temor hacia las matemáticas, desarrollando una comprensión que permita proceder con confianza en la elección de una carrera.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS IMPARES

CAPITULO 1: DIVERSION CON MATEMATICAS

1-1 MODELOS MATEMATICOS

1. El texto muestra los diagramas respectivos para 3×9, 7×9 y 4×9. He aquí los demás:



3. $6^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

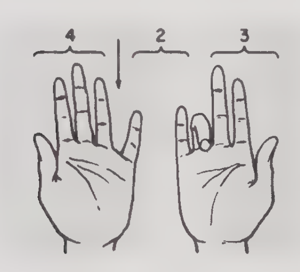
$7^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

$8^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

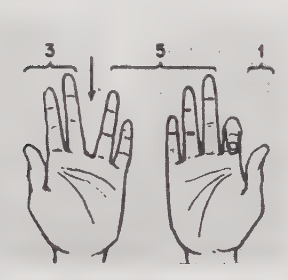
$9^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

7. **(a)** $9 \times 47 = 423$

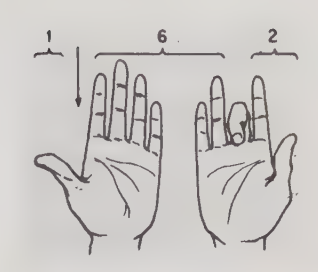




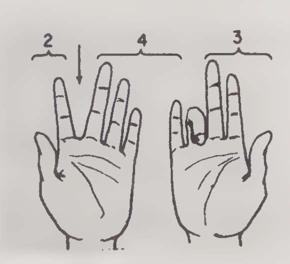
(b) $9 \times 39 = 351$



(c) $9 \times 18 = 162$



(d) $9 \times 27 = 243$



9. **(a)** 40×81, es decir, 3 240;
(b) 100×201, es decir, 20 100;
(c) $25/2 \times 50$, es decir, 625;
(d) 50×200, es decir, 10 000;
(e) 100×402, es decir, 40 200;

11. **(a)** $\frac{3}{4}$;
(b) $\frac{7}{8}$;
(c) $\frac{15}{16}$. En general: $\frac{2^n - 1}{2^n}$.

12 MATEMATICAS RECREATIVAS

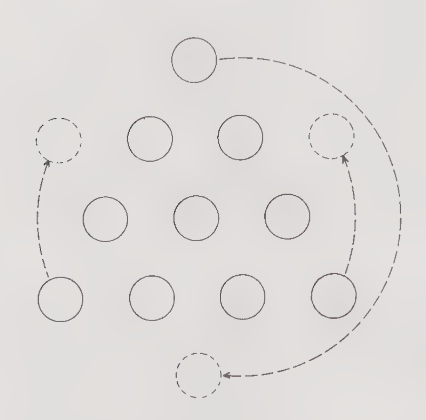
1. **(a)** 12.
(b) Sólo uno, si es lo suficientemente grande.
(c) Hasta la mitad, después empieza a salir.
(d) *Una* de ellas no es de 5 centavos, pero la otra sí.
(e) No hay tierra en un hoyo
(f) Hermano-hermana.

3. Hacen falta once viajes. Primero cruzan el río un caníbal y un misionero; el misionero regresa. Después van dos caníbales y uno regresa. Luego van dos misioneros y regresan un misionero y un caníbal. Van después dos misioneros y un caníbal regresa. Después van dos caníbales y uno de ellos regresa. Por último, los dos últimos caníbales cruzan el río.

5. Después de 27 días le quedan 3 pi-

sos por subir al gato, cosa que hace al siguiente día. Tarda, pues, 28 días.

7.



9. Utilícense los palillos para formar una pirámide triangular.

11. Tanto A como B dirán que son B. Por lo tanto, cuando el segundo dice que el primero dice que es B, el segundo está diciendo la verdad. Por consiguiente los dos primeros dicen la verdad y el tercero miente.

13. Si la moneda de cinco centavos está en la mano izquierda y la de diez en la derecha, el cálculo daría $3 + 60 = 63$, un número impar. Si se cambian las monedas, se tiene $30 + 6 = 36$, un número par.

15. En realidad no falta ningún peso. El cálculo debe hacerse en una de estas dos formas: $(30 - 3) - 2 = 25$, ó $25 + 2 + 3 = 30$. El problema se había planteado de un modo incorrecto, es decir, $(30 - 3) + 2$.

17. Se requieren ocho movimientos. En el siguiente diagrama se representan las monedas así como los cuadrados que pueden utilizarse. Los movimientos son los siguientes, considerando que el primer número indica la posición de la moneda y el segundo el lugar al que debe llevarse: D_1: 4 — 3; P_2: 2 — 4; P_1: 1 — 2; D_1: 3 — 1; D_2: 5 — 3; P_2: 4 — 5; P_1: 2 — 4; D_2: 3 — 2.

1	2	3	4	5
P_1	P_2		D_1	D_2

1-3 MAS ALLA DEL GOOGOL

1. Se tardaría 1 000 000,000 de segundos, es decir, alrededor de 11 574 días.

3. (a) 7, es decir, $2^3 - 1$;
(b) 15, es decir, $2^4 - 1$;
(c) 31, es decir, $2^5 - 1$;
(d) 63, es decir, $2^6 - 1$.
(d) 63, es decir, $2^6 - 1$. Para 30 días: $2^{30} - 1$, es decir, 1,073, 741 823.

5. (a) Aproximadamente tres mil millones;
(b) 3 156 000 000.

7. $\{5, 10, 15, 20, 25, \ldots, 5n, \ldots\}$
$\updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow \quad \updownarrow$
$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$

***9.** 200; $10^{100} \times 10^{100} = 10^{200}$. Este número es mucho menor que un googolplex que es 10 elevado a un googol; es decir, 10 seguido de 10^{100} ceros.

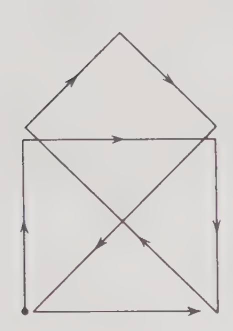
1-4 PROBLEMAS IMPOSIBLES Y PROBLEMAS NO RESUELTOS

1. (a) 5;
(b) 9:
(c) $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

3. (a) Multiplíquese el dígito de las decenas por el siguiente entero consecutivo y después por 100; súmese 25.

(b) Escríbase el número en la forma $10n + 5$. Después $(10n + 5)^2 = 100n^2 + 100n + 25$
$= 100n(n + 1) + 25$.
Ordenando los factores podemos escribir esa última expresión como $n(n + 1)(100) + 25$, que es el modelo para (a).

5. (a) Un posible trazado:



(b) Imposible.

7. Como en el Ejercicio 11 de §1-1, la suma de los n términos es $\frac{2^n - 1}{2^n}$; es decir $1 - \frac{1}{2^n}$ se hace muy pequeño y la suma se acerca cada vez más a 1. Por consiguiente, el límite es 1.

9. 6

*11. (a) 3;
(b) 6;
(c) 10;
(d) $\frac{n(n-1)}{2}$.

*13. $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ (El siguiente número perfecto es 496.)

CAPITULO 2: SISTEMAS DE NUMERACION

2-1 NUMERACION EGIPCIA

1. ∩∩ | | | | |

3. 𓆼 𓍢𓍢𓍢𓍢 ∩∩ | | | | | |

5. 𓂭 𓆼𓆼 𓍢𓍢𓍢𓍢 | | | | | | |

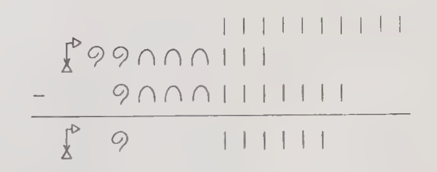
7. 22

9. 1102

11. 1324

13.
∩∩∩∩ | |
\+ ∩∩ |
∩∩∩∩∩∩ | | |

15.
𓍢𓍢 ∩∩∩ | | | | | | | |
\+ 𓍢 ∩∩∩ | | | | |
𓍢𓍢𓍢 ∩∩∩∩∩∩∩ | | |



17.
𓆼 𓍢𓍢 ∩∩∩∩ | | |
− 𓍢 ∩∩∩ | | | : | | |

19. (1) × 45 = (45)

$2 \times 45 = 90$
$4 \times 45 = 180$
$8 \times 45 = 360$
$(16) \times 45 = (720)$
$17 = 1 + 16$
$17 \times 45 = (1 + 16) \times 45$
$= 45 + 720 = 765$

21. $(1) \times 31 = (31)$
$(2) \times 31 = (62)$
$4 \times 31 = 124$
$(8) \times 31 = (248)$
$(16) \times 31 = (496)$
$27 = 1 + 2 + 8 + 16$
$27 \times 31 = (1 + 2 + 8 + 16) \times 31$
$= 31 + 62 + 248 + 496$
$= 837$

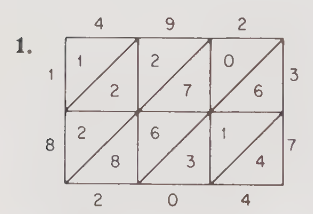
23. 19 → (33)
9 66
4 132
2 264
1 → (528)
$19 \times 33 = 33 + 66 + 528 = 627$

25. 21 → (52)
10 104
5 → (208)
2 416
1 → (832)
$21 \times 52 = 52 + 208 + 832 = 1092$

27. Se necesita un símbolo para el cero dado que el valor de una expresión numérica en nuestro sistema decimal depende tanto del valor como de la posición del dígito en la expresión. Por ejemplo, 405 y 450 representan dos números totalmente diferentes pese a que se utilicen los mismos dígitos en las dos expresiones. Los egipcios no necesitaban el cero dado que el valor de un número no dependía de la posición de los símbolos que en él se empleaban.

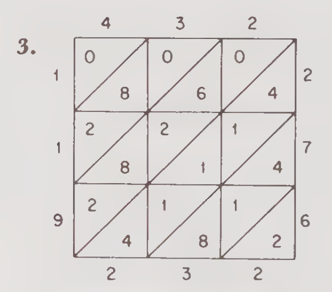
2-2 OTROS METODOS DE CALCULAR

1.



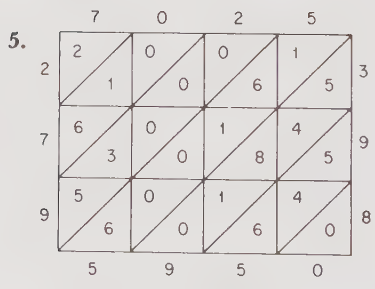
Resultado: 18 204

3.



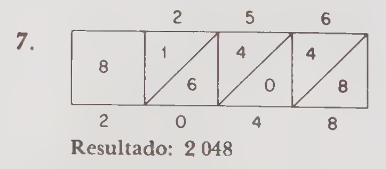
Resultado: 119 232

5.

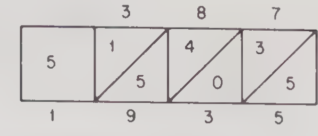


Resultado: 2 795 950

7.



Resultado: 2 048

Resultado: 1 935

11.

	7	2	5	6
8	5 / 6	1 / 6	4 / 0	4 / 8
5	8	0	4	8

Resultado: 58 048

2-3 NOTACION DECIMAL

1. 125

3. 0.001

5. 1

7. 0.04

9. 2000

***11.** 0.0002

13. $(4 \times 10^2) + (3 \times 10^1) + (2 \times 10^0)$

15. $(4 \times 10^0) + (2 \times 10^{-1})$
(3×10^{-2})

17. $(2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$

19. $(4 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (3 \times 10^0) + (8 \times 10^{-1}) + (3 \times 10^{-2})$

21. (7×10^{-3})

23. (1×10^{-4})

25. 3253

27. 52.173

29. 0.0251

2-4 OTROS SISTEMAS DE NOTACION

1. 22 cinco

3. 30 cuatro

5. (* * * * *)
(* * * * *)
* * * *

7.


9. (* * * *)
(* * * *)
* * *

11. 23

13. 26

15. 19

17. 32 cinco

19. 32 seis

2-5 NUMERACION EN BASE CINCO

1. 113

3. 124

5. 86

7. 141

9. 41.8

11. 3012_5

13. 11112_5

15. 10000_5

17. 1022_5

19. 4012_5

***21.** 287

***23.** 11

***25.** 462

***27.** 469

2-6 OTRAS BASES NUMERICAS

1. 314

3. 1076

5. 50

7. 662

9. 2590

11. 3598_{12}

13. $87e0_{12}$

15. 11010_4

17. 1551_6

19. 11143_5

21. 655_9

23. 187_{12}

***25.** $1e7_{12}$

***27.** 101111_2

2-7 CALCULO EN NOTACION DE BASE CINCO

1. 111_5

3. 432_5

5. 11312_5

7. 112_5

9. 134_5

11. 413_5

13. 222_5

15. 3023_5

17. 3401_5

19. 1423_5

21. 21022_5

23. 22_5

25. 224_5 *R* 2

27. 13_5

29. 41_5

31.

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11_5	13_5
3	0	3	11_5	14_5	22_5
4	0	4	13_5	22_5	31_5

***33.**

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10_8
2	2	3	4	5	6	7	10_8	11_8
3	3	4	5	6	7	10_8	11_8	12_8
4	4	5	6	7	10_8	11_8	12_8	13_8
5	5	6	7	10_8	11_8	12_8	13_8	14_8
6	6	7	10_8	11_8	12_8	13_8	14_8	15_8
7	7	10_8	11_8	12_8	13_8	14_8	15_8	16_8

x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10_8	12_8	14_8	16_8
3	0	3	6	11_8	14_8	17_8	22_8	25_8
4	0	4	10_8	14_8	20_8	24_8	30_8	34_8
5	0	5	12_8	17_8	24_8	31_8	36_8	43_8
6	0	6	14_8	22_8	30_8	36_8	44_8	52_8
7	0	7	16_8	25_8	34_8	43_8	52_8	61_8

*35. 10322_6

*37. 226_8

*39. 14446_8

*41. $210_4 R 1$

2-8 NOTACION BINARIA

1. 11100_2
3. 10011_2
5. 10011000_2
7. 15
9. 55
11. 38
13. 11000_2
15. 101_2
17. 100111_2

19. (a) 1000010_2;
(b) 1000100_2;
(c) 1000111_2

*21. $214 = 326_8 = 11\,010\,110_2$. Cuando se separan en grupos de tres, a partir del dígito de las unidades, la representación binaria puede convertirse al sistema octal, y recíprocamente. Así:

$$\underbrace{011}_{3}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{110_2}_{6} = 326_8.$$

29 PARA DIVERTIRSE

1. Los números que encabezan cada columna representan potencias de 2: $2^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$. Cada número menor que 15 puede representarse en notación binaria exactamente de una forma. Cada potencia de 2, o bien formará, o bien no formará parte del número. Las potencias de 2 que formen parte aparecerán en la columna correspondiente *A, B, C* o *D*.

3. Primero escríbanse los números del 0 al 15 en notación binaria con el valor posicional identificado por las columnas *A, B, C* y *D*.

	D	*C*	*B*	*A*
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Las cuatro preguntas a plantearse son: ¿Tiene el número un 1 en la posición *A*? ¿Tiene el número un 1 en la posición *B*? ¿Tiene el número un 1 en la posición *C*? ¿Tiene el número un 1 en la posición *D*? Supongamos que las respuestas son "Sí, No, Sí, Sí". Entonces el número se identifica como 1101_2; es decir, 13.

*5. Hay muchas referencias. Una de ellas es: Burton W. Jones, *Elementary Concepts of Mathematics*, 2ª ed. (Nueva York, Macmillan, 1963).

CAPITULO 3: SISTEMAS MATEMATICOS

3-1 UN SISTEMA ABSTRACTO

1. #

3. Σ

5. Propiedad conmutativa para la "multición".

7. Elemento idéntico (*).

9. Propiedad asociativa para la "multición".

11. Elemento inverso.

13. Δ

15. Sí.

17. Sí.

19. No; debe ser válido para todas las posibles maneras de elegir los tres elementos.

21. Sí; el inverso de Δ es *Q*, el inverso de □ es □, el inverso de *Q* es Δ.

23. No; la tabla contiene los elementos ○ y ~, que no son miembros del conjunto original de elementos.

25. Sí;

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 3-1

1. Considérese la suma de los dos números.

3. Súmese 1 a la suma de los dos números.

***5.** Réstese el segundo número del doble del primero.

7. Basta un contra ejemplo; por ejemplo, $8 \div 3$ no es un número natural.

9. 1. $8 \times 1 = 8$; $13 \times 1 = 13$.

11. Sí. Sí.

***13.** Independientemente del resultado de $(b \# c)$, el resultado de $a \$ (b \# c)$ siempre es a, dado que $ significa seleccionar el primer número. Por lo mismo, $a \$ b = a$, $a \$ c = a$ y por consiguiente, $a \# a = a$.

3-2 LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

1. 8, 8, 3, 7.

3. 7, 7.

5. 3, 3.

7. No.

9. $7 \times 79 = 7 \times (80 - 1) = 560 - 7 = 553$.

11. 3.

13. 5.

15. 7.

17. 7.

19. Es válido para todas las sustituciones de *n*.

3-3 ARITMETICA DEL RELOJ

1. **(a)** Sí;
(b) Sí.

3. El idéntico respecto de la adición es 12; el idéntico respecto de la multiplicación es 1.

5. 3

7. 9

9. 3

11. 5

13. 8

15. 6

17. 1, 5 ó 9.

19. 4

***21.** Ecuación imposible; es decir, no existe ningún valor de t que haga válida dicha ecuación.

***23.** Una identidad; es decir, dicha ecuación es verdadera para todos los valores posibles de t.

25. **(a)** 6;
(b) 16_{12}.

27. **(a)** 9;
(b) 39_{12}.

29. **(a)** 12;
(b) 30_{12}.

3-4 ARITMETICA MODULAR

1.

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

3. Dos casos concretos son $(3.2).4 = 3.(2.4) = 4$ y $(4.3).4 = 4.(3.4) = 3$. Hay muchos otros.

5. El inverso de 1 es 1, el de 2 es 3 y el de 4 es 4. Recuérdese que 0 carece de inverso respecto a la multiplicación.

7. 4

9. 4

11. 3

13. 3

15. 4

17. 4

19. 3

21. 4

23. Ecuación imposible; es decir, no existe ningún valor de x que haga válida esta ecuación.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 3-4

1.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

X	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Este sistema es cerrado, conmutativo y asociativo respecto a la adición y a la multiplicación. Satisface la propiedad distributiva para la multiplicación respecto a la adición. Tiene elementos idénticos para la adición (0) y para la multiplicación (1). Cada elemento tiene su inverso respecto a la adición; no todos los elementos tienen su inverso respecto a la multiplicación.

3. 2

5. 5

7. 3

9. 3

11. 4

13. Ecuación imposible; es decir, no existe valor de x para el cual la ecuación sea verdadera.

15. 0

17. $2.6 = 0$; $3.8 = 0$; $4.6 = 0$; $4.9 = 0$; $6.6 = 0$; $6.8 = 0$; $6.10 = 0$; $8.9 = 0$. Por consiguiente los divisores cero en aritmética módulo 12 son 2 y 6, 3 y 4, 3 y 8, 4 y 9, 6 y 6, 6 y 8, 6 y 10, 8 y 9.

19.

~	*I*	*R*	*H*	*V*
I	*I*	*R*	*H*	*V*
R	*R*	*I*	*V*	*H*
H	*H*	*V*	*I*	*R*
V	*V*	*H*	*R*	*I*

El sistema es cerrado, conmutativo y asociativo respecto de la operación dada. Existe un elemento idéntico I y cada elemento es su propio inverso respecto a ~.

CAPITULO 4: CONJUNTOS Y PROPOSICIONES

4-1 NOTACION PARA CONJUNTOS

1. $\in$

3. $\notin$

5. Bien definido.

7. No bien definido.

9. Iguales.

11. Iguales.

13. {Enero, Febrero, Marzo, ..., Diciembre}.

15. $\{2, 3, 4, \ldots, 9\}$.

17. El conjunto de los números naturales del 1 al 6.

19. El conjunto de los números naturales mayores que 50.

21. El conjunto de los múltiplos de 10 desde 10 hasta 150.

***23.** El conjunto de los números naturales que pueden expresarse en la forma $n(n - 1)$, cuando n varía desde 0 hasta 10.

4-2 SUBCONJUNTOS

1. Entre las muchas respuestas correctas se tienen las siguientes: El conjunto de los enteros impares divisibles por 2; El conjunto de los enteros comprendidos entre 4 y 5, El conjunto de los enteros pares comprendidos entre 6 y 8; Los humanos que han viajado a Venus; Las gallinas que ponen huevos de oro; Las personas con diez pies.

3. (a) $\{p, r, o, f, e, s\}$;
(b) $\{f, s\}$;
(c) $\{p, f\}$;
(d) $\{f\}$.

5. (a) $\{2, 4, 6, 8\}$;
(b) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

7.

Número de elementos	0	1	2	3	4	5	6
Número de subconjuntos	1	2	4	8	16	32	64

9. $N = 2^n$

4-3 CONJUNTOS EQUIVALENTES

1. $\{1, 2\} \leftrightarrow \{p, q\}$ (1 ↔ p, 2 ↔ q); $\{1, 2\} \leftrightarrow \{q, p\}$ (1 ↔ q, 2 ↔ p)

3.
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{r, e, s, t\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{r, e, t, s\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{r, s, e, t\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{r, s, t, e\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{r, t, e, s\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{r, t, s, e\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{e, r, s, t\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{e, r, t, s\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{e, s, r, t\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{e, s, t, r\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{e, t, r, s\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{e, t, s, r\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{s, r, e, t\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{s, r, t, e\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{s, e, r, t\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{s, e, t, r\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{s, t, r, e\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{s, t, e, r\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{t, r, e, s\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{t, r, s, e\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{t, e, r, s\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{t, e, s, r\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{t, s, r, e\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{t, s, e, r\}$

5. Entre las muchas respuestas correctas se tiene la siguiente: El conjunto $(n, ú, m, e, r, o)$, de letras que contiene la palabra "número".

7. Entre las muchas respuestas correctas se tiene la siguiente: el conjunto vacío.

9. 3

11. 8

13. 0

15. Entre las muchas respuestas correctas se tiene la siguiente: El conjunto de los números naturales.

17. (a) Sí. Dos conjuntos cualesquiera que consten de los mismos elementos tienen el mismo número de elementos.
(b) No. Dos conjuntos pueden tener el mismo número de elementos sin tener los mismos elementos.

19. Entre las muchas respuestas correctas se tiene la siguiente:

$$\begin{matrix} \{a, & e, & i, & o, & u\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{2, & 4, & 6, & 8, & 10\} \end{matrix}$$

***21.**
$$\begin{matrix} \{1, & 3, & 5, & 7, & 9, & \ldots, & 2n-1, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{5, & 10, & 15, & 20, & 25, & \ldots, & 5n, & \ldots\} \end{matrix}$$

4-4 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

1. (a) $\{1, 2, 3, 5, 7\}$;
(b) $\{1, 3\}$.

3. (a) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$;
(b) $\{7\}$.

5. (a) $\{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$;
(b) $\varnothing$.

7. (a) $\{1, 2, 3, \ldots\}$;
(b) $\varnothing$.

9. (a) $\{3, 4, 5\}$;
(b) $\{2, 4\}$;
(c) $\{2, 3, 4, 5\}$;
(d) $\{4\}$.

11. (a) $\{2, 4, 6, \ldots\}$;
(b) $\{1, 3, 5, \ldots\}$;
(c) $\{1, 2, 3, \ldots\}$;
(d) $\varnothing$.

13. (a) $\{2, 3\}$;
(b) $\{1, 2\}$;
(c) $\{1, 2, 3\}$;
(d) $\{2\}$.

15. $\{6, 8\}$

17. $\{2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$

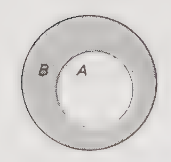
19. $\{4, 5, 9\}$

21. (a) A;
(b) B;
(c) $\varnothing$;
(d) U.

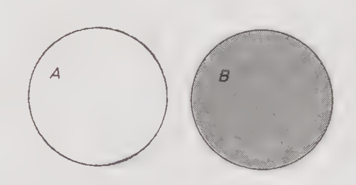
4-5 CONJUNTOS DE PUNTOS

1. (a) 2;
(b) 9;
(c) 4;
(d) 13.

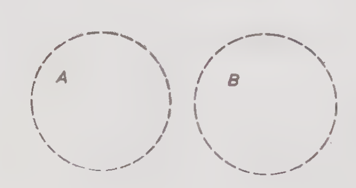
3.



5.



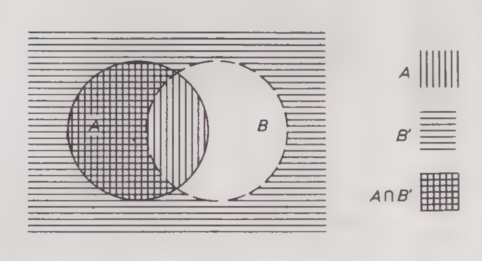
7.



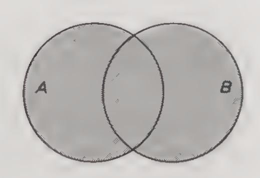
9. A' está rayado horizontalmente; B está rayado verticalmente. La unión de los dos conjuntos es el subconjunto de U que está rayado en una o en ambas direcciones.



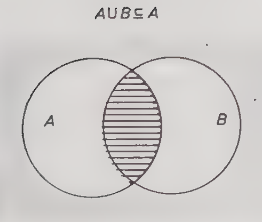
11. A está rayado verticalmente; B' está rayado horizontalmente. La intersección de esos dos conjuntos es el subconjunto de U que está rayado en ambas direcciones.



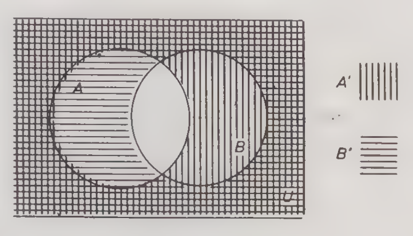
13.



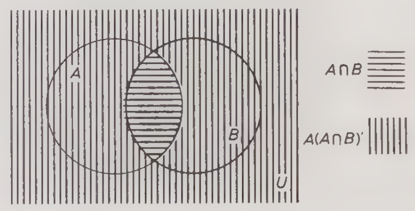
15.



17. En el siguiente par de diagramas el resultado final es el mismo, demostrándose la equivalencia de las proposiciones dadas.



El conjunto $(A \cap B)$ está rayado horizontalmente. Su complemento, $(A \cap B)'$, es la porción restante de U rayada verticalmente.



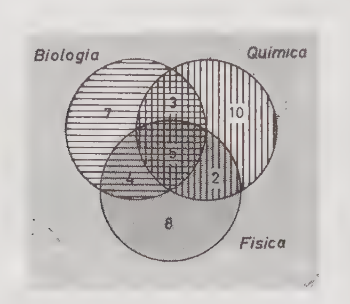
El conjunto A' está rayado verticalmente; el conjunto B' está rayado horizontalmente. La unión de ellos, $A' \cup B'$, es la porción de U rayada en una o en ambas direcciones.

19. (a) 1;
(b) 5;
(c) 4;
(d) 12;
(e) 21;
(f) 25.

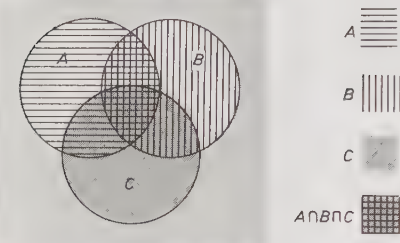
21. (a) 25;
(b) 7;
(c) 7;
(d) 29;
(e) 37;
(f) 6.

23. Hay 11 alumnos que no estudian ninguna de las tres materias, 10 sólo es-

tudian química y 2 estudian física y química pero no biología. Los datos se muestran en el siguiente diagrama de Venn:



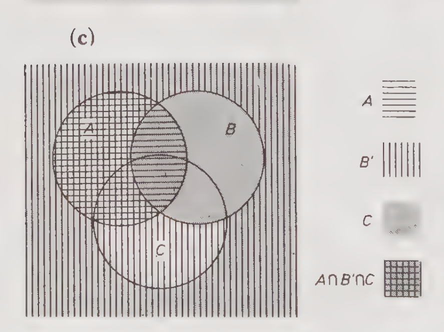
25. **(a)**



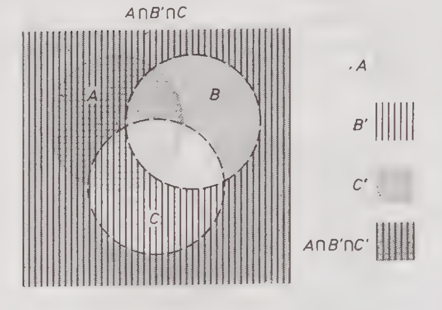
(b)

A B C C' $A \cap B \cap C'$

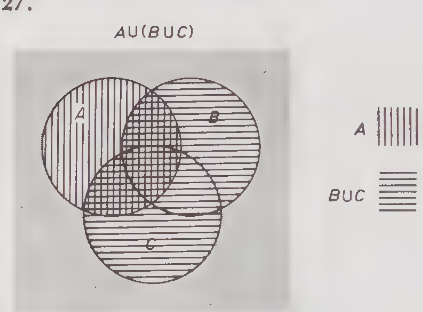
(c)



(d)



27.



El conjunto A está rayado verticalmente; el conjunto $(B \cup C)$ está rayado horizontalmente. La unión $A \cup (B \cup C)$, está rayado en una o en ambas direcciones.

$(A \cup B) \cup C$

$A \cup B$ C

El conjunto $(A \cup B)$ está rayado verticalmente; el conjunto C está rayado horizontalmente. La unión $(A \cup B) \cup C$, está rayada en una o en ambas direcciones.

4-6 CONJUNTOS DE PROPOSICIONES

1. (a) $(\sim p) \wedge (\sim q)$;
(b) $(\sim p) \wedge q$;
(c) $(\sim p) \wedge q$;
(d) $\sim[p \wedge (\sim q)]$;
(e) $p \vee (\sim q)$.

3. (a) $p \wedge (\sim q)$;
(b) $p \vee (\sim q)$;
(c) $(\sim p) \wedge q$;
(d) $\sim[(\sim p) \wedge q]$;
(e) $\sim[(\sim p) \wedge q]$.

5. (a) Me gusta este libro y me gustan las matemáticas.
(b) No me gustan las matemáticas.
(c) No me gusta este libro.
(d) No me gusta este libro y no me gustan las matemáticas.

7. 5(a), 6(b) y 6(d).

***9.** (a) Verdadera.
(b) Verdadera.
(c) Verdadera.
(d) Verdadera.

4-7 VALORES VERITATIVOS DE LAS PROPOSICIONES

1.

p	q	$(\sim p) \wedge q$
T	T	F
T	F	F
F	T	T
F	F	F

3.

p	q	$(\sim p) \vee (\sim q)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

5.

p	q	$\sim(p \wedge q)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

7.

p	q	$\sim$	$[p$	$\vee$	$(\sim q)]$
T	T	F	T	T	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T
		(d)	(a)	(c)	(b)

9.

p	q	$\sim$	$[(\sim p)$	$\wedge$	$(\sim q)]$
T	T	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T
		(d)	(a)	(c)	(b)

11.

p	q	$p \veebar q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

13. $\sim(p \wedge q)$

4-8 PROPOSICIONES CONDICIONALES

1. Si estudia con empeño, obtendrá sobresaliente.

3. Si no estudia con empeño, entonces no obtendrá sobresaliente.

5. (a) Si un triángulo es equilátero, entonces el triángulo es isósceles.
(b) Si un triángulo es isósceles, entonces el triángulo es equilátero.
(c) Si un triángulo no es equilátero, entonces el triángulo no es isósceles:
(d) Si un triángulo no es isósceles, entonces el triángulo no es equilátero.

7. (a) V;
(b) V;
(c) V.

9.

p	q	$p \to q$	$(\sim p)$	$\vee$	q
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F
		(a)	(b)	(d)	(c)

Obsérvese que los valores veritativos en las columnas (a) y (d) son los mismos.

11.

p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T
		(a)	(c)	(b)

13.

p	q	$[(\sim p)$	$\wedge$	$q]$	$\to$	$(p \vee q)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F
		(a)	(c)	(b)	(e)	(d)

15. $\{7\}$.

***17.** El conjunto de todos los números reales.

***19.** El conjunto de todos los números reales diferentes de 2.

CAPITULO 5: CONJUNTOS DE NUMEROS

5-1 USOS DE LOS NUMEROS

1. Ordinal.

3. Ordinai.

5. Ordinal.

7. Identificación.

9. Ordinal.

11.
$$\begin{matrix}\{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{1, & 3, & 5, & 7, & 9, & \ldots, & 2n-1, & \ldots\}\end{matrix}$$

13.
$$\begin{matrix}\{2, & 4, & 6, & 8, & 10, & \ldots, & 2n, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{1, & 3, & 5, & 7, & 9, & \ldots, & 2n-1, & \ldots\}\end{matrix}$$

15.
$$\begin{matrix}\{101, & 103, & 105, & 107, & 109, & \ldots, & n, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{102, & 104, & 106, & 108, & 110, & \ldots, & n+1, & \ldots\}\end{matrix}$$

17. Infinito.

19. Finito.

21. Finito.

23. Infinito.

25. El conjunto {1, 2, 3, ..., n, ...) tiene el número cardinal transfinito $\aleph_0$; el conjunto (Δ, □, 1, 2, 3, ..., n, ...) tiene el número cardinal $\aleph_0 + 2$, que es el mismo que $\aleph_0$. La equivalencia de los dos conjuntos puede establecerse como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n & \ldots\}, \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{\triangle, & \square, & 1, & 2, & 3, & \ldots, & n-2, & \ldots\} \end{array}$$

27. El conjunto (1, 2, 3, ... n, ...) tiene el número cardinal transfinito $\aleph_0$; el conjunto, quitándole el 1, tiene el número cardinal $\aleph_0 - 1$, que es el mismo que $\aleph_0$. La equivalencia de los dos conjuntos puede establecerse como sigue:

$$\begin{array}{cccccc} \{1, & 2, & 3, & \ldots, & n, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{2, & 3, & 4, & \ldots, & n+1, & \ldots\} \end{array}$$

5-2 NUMEROS PRIMOS

1. Cualquier número divisible por 15 también lo es por 3.

3. El conjunto de los números divisibles por 3 y 5 es el conjunto de los números divisibles por 15.

5. Cualquier número divisible por 12 también lo es por 3.

7. {21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39}

9. No. No

11. Hay otras posibles respuestas en muchos casos. $4 = 2 + 2$, y

$6 = 3 + 3$;	$8 = 3 + 5$;
$10 = 3 + 7$;	$12 = 5 + 7$;
$14 = 7 + 7$;	$16 = 3 + 13$;
$18 = 5 + 13$;	$20 = 7 + 13$;
$22 = 5 + 17$;	$24 = 7 + 17$;
$26 = 3 + 23$;	$28 = 5 + 23$;
$30 = 7 + 23$;	$32 = 3 + 29$;
$34 = 5 + 29$;	$36 = 7 + 29$;
$38 = 7 + 31$;	$40 = 3 + 37$.

13. Tres números impares consecutivos cualesquiera incluyen al 3 o a un múltiplo de 3. Todo múltiplo de 3 es compuesto, y el 1 por definición no es primo. Por consiguiente, 3, 5, 7 es un conjunto de tres números impares consecutivos que son los tres primos, y puesto que cualquier otro conjunto de ese tipo contiene un número compuesto que es múltiplo de 3, ésta es la única terna prima.

***15.** (a) 13;
(b) 19;
(c) 31.

17. 1×15; 3×5.

19. 1×20; 2×10; 4×5.

21. 1×29.

23. $2^2 \times 17$.

25. 3×41.

27. $3 \times 5^2 \times 19$.

29. 2×409.

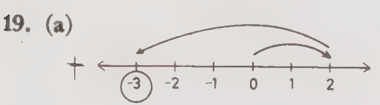
5-3 APLICACIONES DE LA FACTORIZACION PRIMA

1. $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
3. $\{1, 3, 9\}$
5. $\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$
7. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$
9. $68 = 2^2 \times 17$; $76 = 2^2 \times 19$; M.C.D. $= 4$.
11. $76 = 2^2 \times 19$; $1425 = 3 \times 5^2 \times 19$ M.C.D. $= 19$.
13. $215 = 5 \times 43$; $1425 = 3 \times 5^2 \times 19$ M.C.D. $= 5$.
15. $12 = 2^2 \times 3$; $15 = 3 \times 5$; $20 = 2^2 \times 5$; M.C.D. $= 1$.
17. $12 = 2^2 \times 3$; $18 = 2 \times 3^2$; $30 = 2 \times 3 \times 5$; M.C.D. $= 2 \times 3 = 6$.
19. $\{7, 14, 21, 28, 35\}$
21. $\{15, 30, 45, 60, 75\}$
23. Ver el Ejercicio 9; M.C.M. $= 2^2 \times 17 \times 19 = 1292$.
25. Ver el Ejercicio 11; M.C.M. $= 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 19 = 5700$.
27. Ver el Ejercicio 13; M.C.M. $= 3 \times 5^2 \times 19 \times 43 = 61{,}275$.
29. Ver el Ejercicio 15; M.C.M. $= 2^2 \times 3 \times 5 = 60$.
31. Ver el Ejercicio 17; M.C.M. $= 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.
33. $\frac{123}{215}$
35. $\frac{5}{12}$
37. $\dfrac{1{,}259}{26{,}445}$

*39. 1

5-4 EL CONJUNTO DE LOS ENTEROS

1. -3
3. -3
5. -21
7. -4
9. -15
11. 24
13. -4
15. El conjunto de los enteros no es asociativo respecto a la división. Por ejemplo, $8 \div (4 \div 2) = 8 \div 2 = 4$, pero $(8 \div 4) \div 2 = 2 \div 2 = 1$.
17. El conjunto vacío.
19. (a)



(b)



21. Verdadera.
23. Verdadera.
25. Verdadera.
27. Sean $2k$ y $2m$ dos enteros pares. Entonces

$$2k \times 2m = 2 \times 2 \times k \times m = 2(2km),$$

siendo $2km$ entero. Por consiguiente $2(2km)$ es entero par.

*29. Todo entero es par o impar. Si un entero es par, entonces su cuadrado es par (como en el Ejemplo 5). Si un entero es impar, entonces su cuadrado es impar (como en el Ejercicio 28). Si el cuadrado de un entero es impar, el entero no puede ser par y por consiguiente será impar. Si el cuadrado de un entero es par, el entero no puede ser impar y por consiguiente será par.

5-5 EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES

1. $\frac{7}{6}$

3. $\frac{10}{21}$

5. $\frac{5}{6}$

7. $\frac{3}{4}$

9. $\frac{1}{2}$

11. $\frac{9}{8}$

13. $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$

15. $\frac{3}{4} \div \frac{3}{4} = 1$

17. Falsa.

19. Falsa.

21.

Conjunto	3	0	$-\frac{2}{3}$
Números naturales	✓	x	x
Enteros	✓	✓	x
Números racionales	✓	✓	✓

5-6 EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	Sí.	Sí.	No.	Sí.
3.	Sí.	Sí.	No.	Sí.
5.	No.	No.	Sí.	Sí.
7.	No.	Sí.	No.	Sí.
9.	No.	No.	Sí.	Sí.

11. Puro.

13. Periódico.

15. Puro.

17. 0.6

19. 1.8

21. $\frac{5}{11}$

23. $\frac{58}{111}$

25. $\frac{19}{9}$

27. $\frac{212}{99}$

29. $\frac{41}{333}$

31. Verdadero.

33. Verdadero.

35. Verdadero.

37. (a) 7;
(b) 8.

5-7 RELACIONES DE ORDEN

1. $3 < 6$

3. $7 < 11$

5. $3 + 4 > 5$

7. $3 - 2 < 5 - 3$

9. $5 \times 6 = 6 \times 5$

11. $\frac{720}{180} < \frac{720}{120}$

13. (1) $3 \neq 6$; (2) $11 \neq 17$;
(3) $7 \neq 11$; (4) $7 \neq 3$;
(5) $3 + 4 \neq 5$; (6) $3 + 4 = 7$;
(7) $3 - 2 \neq 5 - 3$;
(8) $7 + 5 = 5 + 7$;
(9) $5 \times 6 = 6 \times 5$;
(10) $\frac{120}{30} \neq \frac{120}{40}$;
(11) $\frac{720}{180} \neq \frac{720}{120}$;
(12) $17 \times 31 \neq 17 \times 29$.

15. (1) $3 \leq 6$; (2) $11 \leq 17$; (3) $7 \leq 11$; (4) $7 > 3$; (5) $3 + 4 > 5$; (6) $3 + 4 \leq 7$; (7) $3 - 2 \leq 5 - 3$; (8) $7 + 5 \leq 5 + 7$; (9) $5 \times 6 \leq 6 \times 5$; (10) $\frac{120}{30} > \frac{120}{40}$; (11) $\frac{720}{180} \leq \frac{720}{120}$; (12) $17 \times 31 > 17 \times 29$.

17. 1.4; 1.414; 1.4141; 1.414114111 . . .; $1.\overline{41}$.

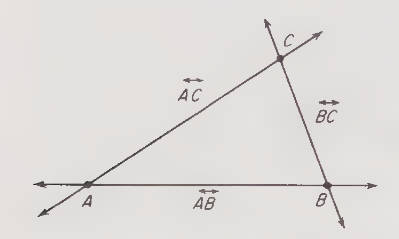
19. (a), (b) y (d).

21. 0.5235.; $0.\overline{523}$; son posibles muchas otras respuestas.

23. 0.787887888 . . .; 0.785785578555 . . .; son posibles muchas otras respuestas.

CAPITULO 6: UNA INTRODUCCION A LA GEOMETRIA

6-1 PUNTOS, LINEAS Y PLANOS



3. *ABC*, *ABD*, *ACD*, *BCD*.

5. (a) 1; (b) 3; (c) 6; (d) 10; (e) 15; *(f) 45; *(g) $n(n - 1)/2$.

7. Verdadero.

9. Falso.

11. Falso.

13. Falso.

15. Falso.

17. Verdadero.

6-2 RAYOS, SEGMENTOS DE RECTA Y ANGULOS

1. $\overline{AD}$

3. $\overline{BC}$

5. $\overline{BC}$

7. $\overline{BC}$

9. $\overrightarrow{BC}$ (o $\overrightarrow{BD}$).

11. B

13. Conjunto vacío.

15. Interior de $\angle ABD$.

17. $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{BA}$

19. $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{PA}$

21. $\angle BPC$

23. $\overleftrightarrow{AC} \cup \overset{\circ\!\!\rightarrow}{PB}$

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 6-2

1. $\overline{BD}$

3. $\overline{BC}$

5. $\overline{DA}$

7. $\overline{BD}$

9. $\overleftrightarrow{AB}$

11. $\overline{DB}$

13. $\overrightarrow{DB}$

15. Conjunto vacío.

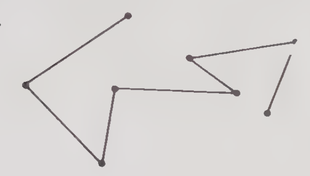
17. $\overline{BD}$

19. (Interior $\angle ADC$) $\cup$ D.

21. Exterior $\angle ADB$.

6-3 FIGURAS EN EL PLANO

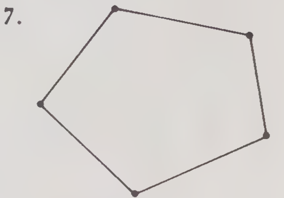
1.



3.

5.

7.



9. Conjunto vacío.

11. M

13. P

15. $\overset{\circ\!-\!\circ}{MN}$

17. $\triangle RMN$

19. $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{MP} \cup \overset{\circ\!\!\longrightarrow}{NV}$

21. $\overline{MN}$

23. Interior $\triangle MRN$.

25. Interior del cuadrilátero $STNM$.

27. Interior $\triangle RST$.

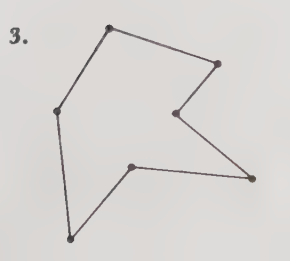
EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 6-3

Existen muchas respuestas correctas para los Ejercicios 1 y 3.

1.



3.



5. Conjunto vacío.

7. $\{B, D\}$

9. $\overline{BF}$

11. Interior $\triangle CBD$.

13. $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{FG}$

15. $\overset{\circ\!-\!\circ}{BD}$

6-4 FIGURAS EN EL ESPACIO

1. (a) M, N, O, P;
(b) $\overline{MN}, \overline{MO}, \overline{MP}, \overline{ON}, \overline{NP}, \overline{PO}$;
(c) las regiones triangulares MNO, PMN, PNO, PMO.

3. (a) A, B, C, D, E, F, G, H;
(b) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}, \overline{DH}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}, \overline{HE}$;
(c) las regiones cuadradas $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, $EFGH$.

5. (a) J, K, L, M, N, O;
(b) $\overline{JK}, \overline{KL}, \overline{JL}, \overline{JM}, \overline{KN}, \overline{LO}, \overline{MN}, \overline{NO}, \overline{OM}$;
(c) las regiones triangulares JKL, MNO y las regiones rectangulares $JKNM$, $KLON$, $LJMO$.

7. Pirámide pentagonal.
9. Prisma exagonal.
11. (Figura dada.)
13. (Figura dada.)

	V	E	F
7.	6	10	6
9.	12	18	8
11.	5	9	6
13.	9	16	9

15. (a) 6;
(b) 1, 6, 12, 8, 0

6-5 CURVAS EN EL PLANO

Los Ejercicios 1, 3, 5 y 7 pueden resolverse de muchas formas.

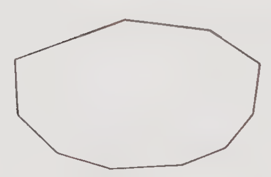
1.



3.



5.



7.

	V	A	R
9. (a)	4	4	2
(b)	4	5	3
11. (a)	2	2	2
(b)	2	3	3
13. (a)	5	4	1
(b)	16	24	10

15. $A = V + R - 2$

6-6 REDES

1. (a) 4;
(b) 0;
(c) atravesable, A, B, C, D.

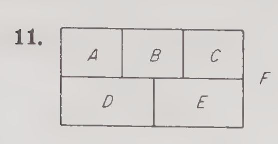
3. (a) 2;
(b) 2;
(c) atravesable, K, M.

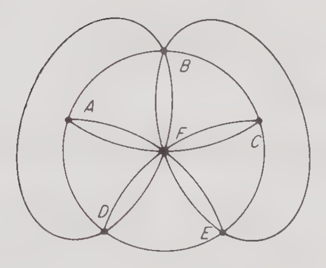
5. (a) 4;
(b) 0;
(c) atravesable, U, V, W, X.

7. (a) 0;
(b) 4;
(c) no atravesable.

9. El inspector puede utilizar un mapa con los caminos como una red, determinar el número de vértices impares y saber que cada sección se puede atravesar una sola vez mediante un solo recorrido si hay, a lo sumo, dos vértices impares.

11.





Considérense las seis regiones, cada una designada mediante una letra y obsérvense los arcos que se requieren en la red para representar los segmentos de recta. Dado que la red tiene cuatro vértices impares (*B, D, E* y *F*), no es atravesable, no pudiéndose dibujar la línea requerida.

***13.** Añádase un puente más que una dos puntos cualesquiera *A, B, C, D.*

6-7 TOPOLOGIA

5. Dos puntos cualesquiera de la superficie pueden unirse mediante un arco que no cruce ninguna arista.

CAPITULO 7: UNA INTRODUCCION AL ALGEBRA

7-1 EXPRESIONES Y GRAFICAS

1. (a) Igualdad.
(b) Falso.

3. (a) Desigualdad.
(b) Verdadero.

5. (a) Desigualdad.
(b) Verdadero.

7. (a) Desigualdad.
(b) Verdadero.

9. (a) Igualdad.
(b) Verdadero.

11. (a) Igualdad.
(b) Falso.

13. (a) Desigualdad.
(b) Falso.

15. (a) Desigualdad.
(b) Falso.

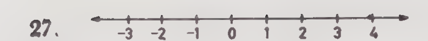
17. Punto.

19. El conjunto vacío.

21. Semi recta.

23. Segmento de recta.

25. Recta.

27. 

29. 

31.

33.

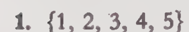
35. 

37.

*39.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 7-1

1. {1, 2, 3, 4, 5}





3. {3, 4, 5}



5. {3, 4, 5, 6}





7. [−2, 5]



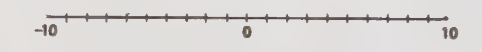
9. [0, 5]



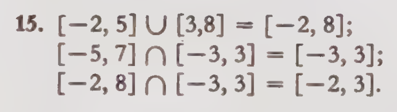
11. [3, 5]′



13. [—7, 2] y [3, 5] son conjuntos disjuntos; su intersección es el conjunto vacío. El complemento del conjunto vacío es el conjunto universal, en este caso, [—10, 10].



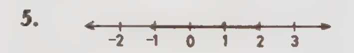
15. [−2, 5] ∪ [3,8] = [−2, 8];
[−5, 7] ∩ [−3, 3] = [−3, 3];
[−2, 8] ∩ [−3, 3] = [−2, 3].



7-2 EXPRESIONES COMPUESTAS

1. {−1, 0, 1, 2}

3. Todos los enteros.

5. 

7.

9. 

11. 

13. 

15. 

17. 

19.

21.

23.

*25.

27. 5

29. 10

31. $x = 3$ o $x = -3$.

33. $x \leq 3$ y $x \geq -3$.

35. $x - 2 = 3$ o $x - 2 = -3$; es decir, $x = 5$ o $x = -1$.

*37. $x - 1 \leq 3$ y $x - 1 \geq -3$; es decir, $x \leq 4$ y $x \geq -2$.

*39. $-2 < x < 1$ o $x = 3$ o $x = -3$.

7-3 EXPRESIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

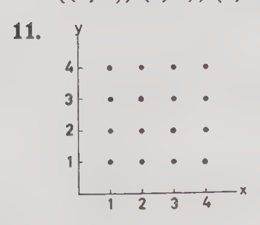
1. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

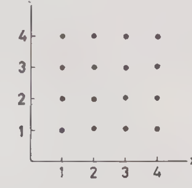
3. $\{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$

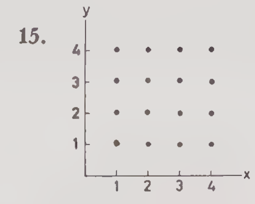
5. $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$

7. $\{(1, 2), (2, 3)\}$

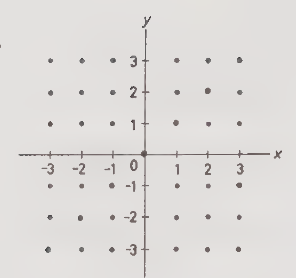
9. $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

11. 

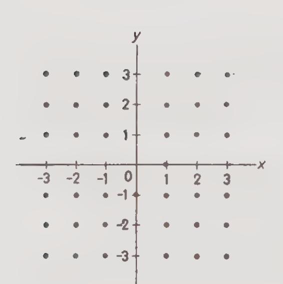
13. 

15. 

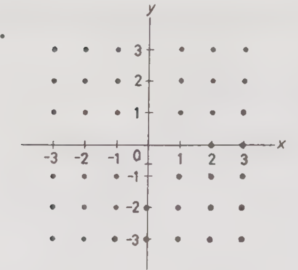
17.



19.



21.



23. El conjunto solución es el conjunto vacío.

7-4 GRAFICAS SOBRE UN PLANO

1. (a) 4;
   (b) 4.
3. (a) -2;
   (b) 4.
5. (a) 6;
   (b) 4.
7. (a) 4;
   (b) 2.

9.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	0	1	2	3	4	5

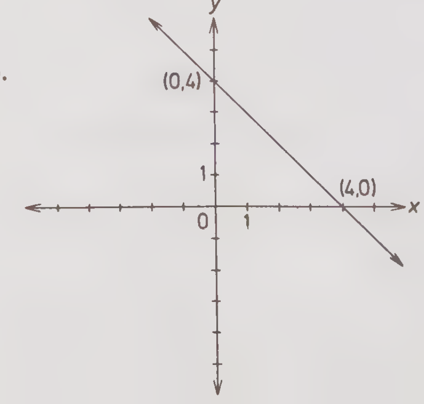
11.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	3	2	1	2	3	4

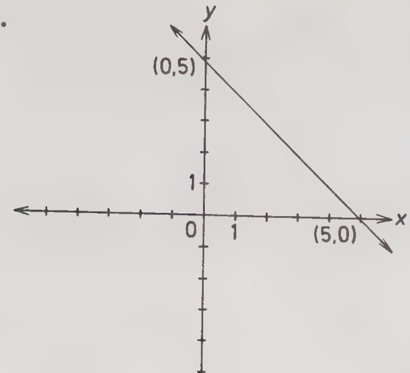
13.

y
1
x
0 1 (2,0)
(0,-2)

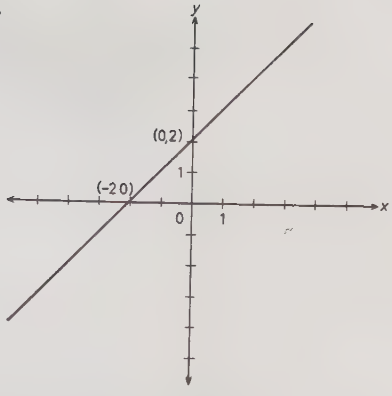
15.



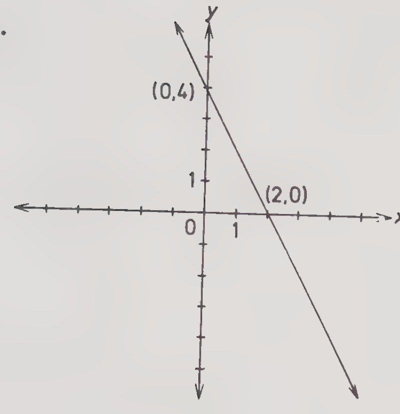
17.



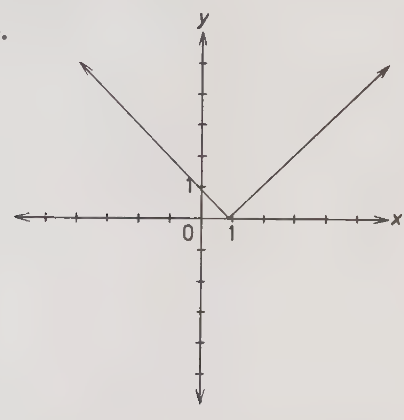
23.



19.

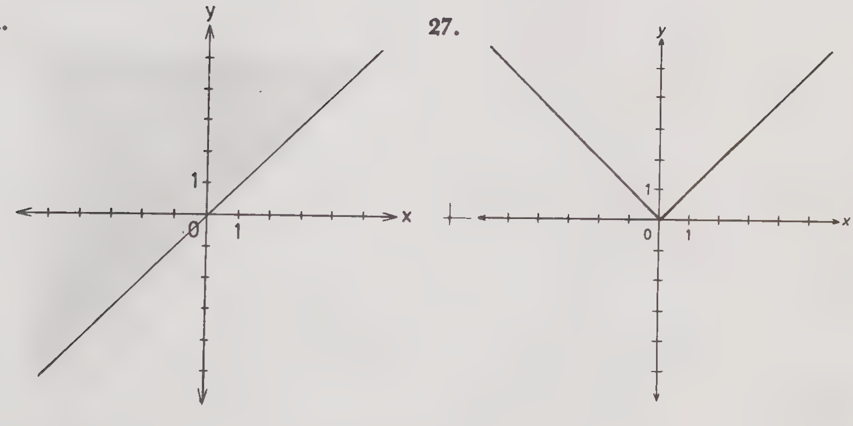


25.

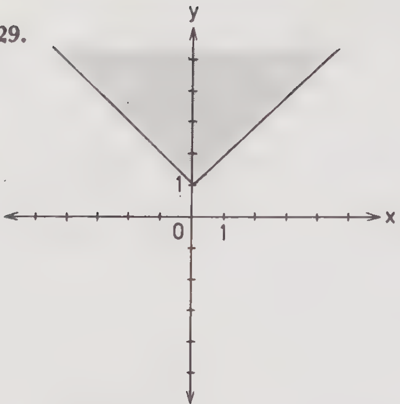


21.

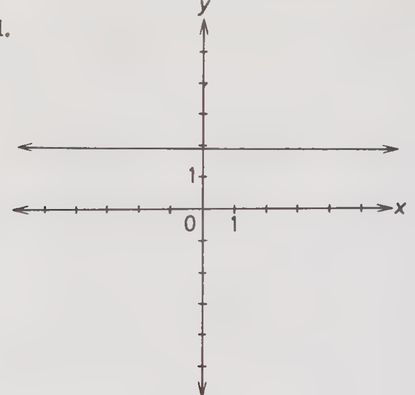
27.



29.

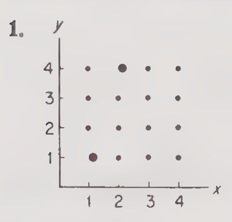


31.

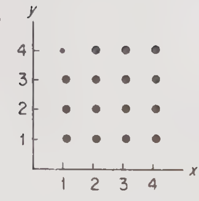


EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 7-4

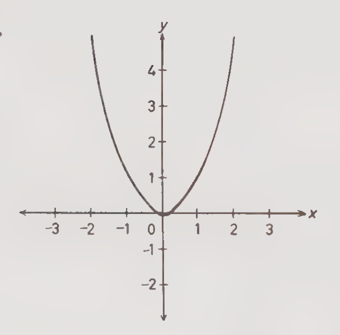
1.



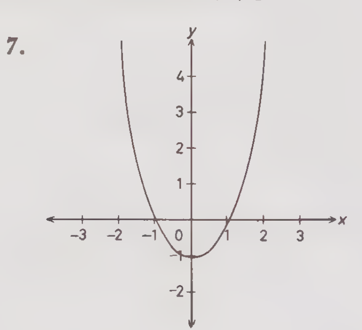
3.



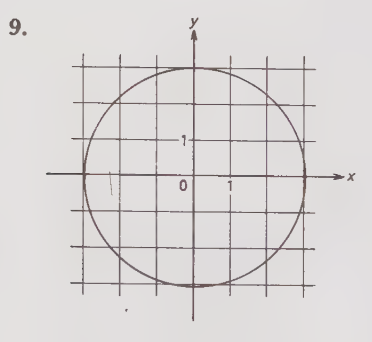
5.



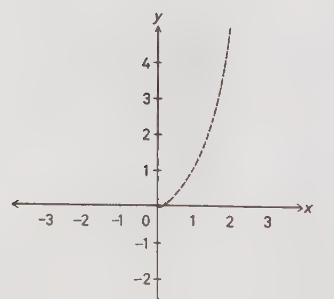
7.



9.



*11.

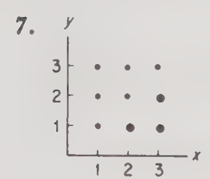


7-5 RELACIONES Y FUNCIONES

1. (a) -1;
(b) 0;
(c) 15.

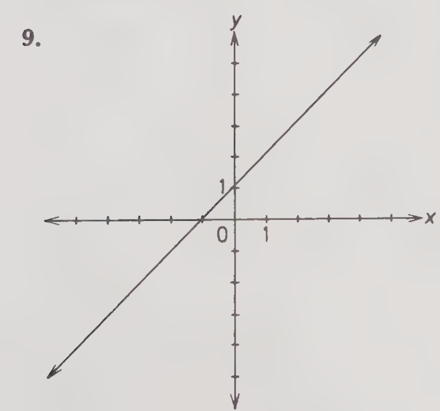
3. (a) 1;
(b) -8;
(c) -15.

5.



Una función.
Dominio: $\{1, 2, 3\}$
Recorrido: $\{1, 2, 3\}$

7.

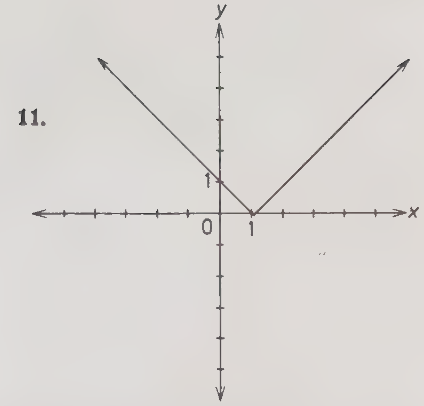


No es función.

9.

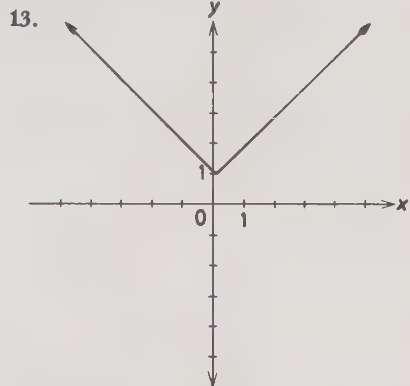
Una función. Tanto el dominio como el recorrido es el conjunto de los números reales.

11.



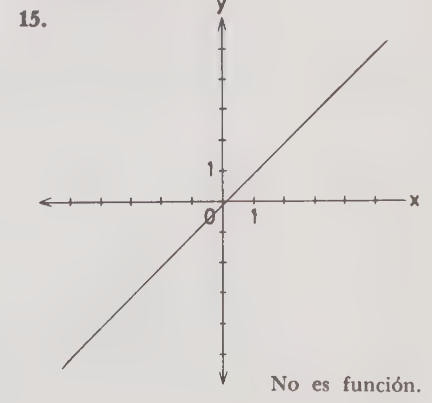
Una función. El dominio es el conjunto de los números reales; el recorrido es el conjunto de los números reales no negativos.

13.



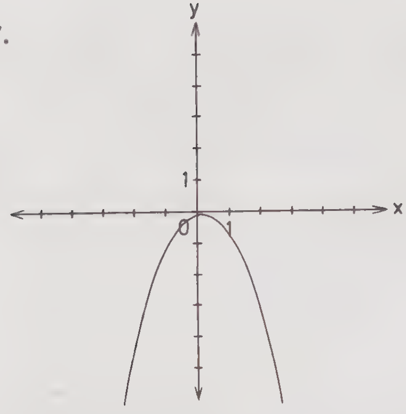
Una función. El dominio es el conjunto de los números reales; el rango es el conjunto de los números reales mayores o igual a 1.

15.



No es función.

*17.



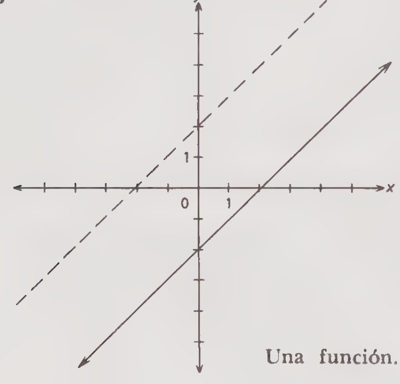
Una función. El dominio es el conjunto de los números reales; el rango es el conjunto de los números reales menores o igual a 0.

19. { (1, 1), (2, 2), (3, 3) }: una función.

21. { (3, 1), (4, 2), (4, 3) }: no es función.

23. $x = y + 1$: una función.

25

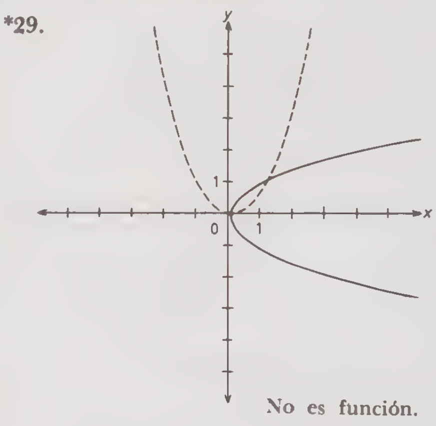


Una función.

27.

Una función. (Obsérvese que la inversa es la misma función dada.)

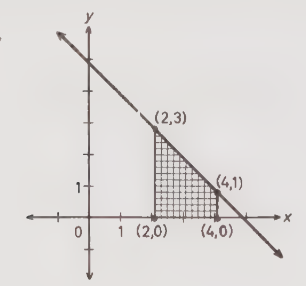
*29.



No es función.

7-6 PROGRAMACION LINEAL

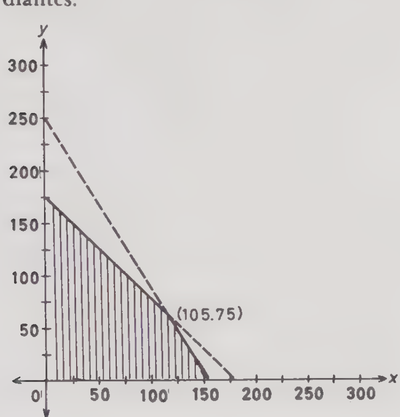
1.



3. (a) El máximo valor 8 en (2, 3).
(b) El mínimo valor 2 en (2, 0).

5. (a) El máximo valor 5 en (3, 2).
(b) El mínimo valor 0 en (0, 0).

7. Las condiciones son $0 \leq x$, $0 \leq y$, $x + y \leq 180$ y $5x + 3y \leq 750$. El valor máximo de $3x + 2y$ se presenta en (105, 75); por consiguiente, bajo las condiciones del ejercicio, 105 minutos, de enseñanza clásica y 75 minutos de circuito de televisión es lo óptimo para los estudiantes.



9. El valor máximo de $x + 2y$ se presenta en (30, 150); por consiguiente, bajo las condiciones del ejercicio, 30 minutos de enseñanza clásica y 150 minutos de televisión es lo óptimo para los estudiantes.

CAPITULO 8: UNA INTRODUCCION A LA PROBABILIDAD

8-1 PROBLEMAS DE COMPUTO

1. (a) 60;
(b) 125.

3. 12

5. 24

7. 25; 20.

9. 1320

11. 90,000

13. (a) 12;
(b) 3.

***15.** (a) 450;
(b) 180;
(c) 648;
(d) 200.

***17.** $26 \times 25 \times 9 \times 9 \times 8$; es decir, 421 200.

8-2 PERMUTACIONES

1. 120

3. 56

5. 42

7. 10

9. 12!; es decir, 479 001 600

11. 30

13. 720

15. 6

17. 5

19. (a) 20;
(b) 120.

21. 210

23. 9!; es decir, 362 880.

25. ${}_nP_0 = 1$

8-3 COMBINACIONES

1. (a) 15;
(b) 56.

3. (a) 21;
(b) 35.

5. (a) 55;
(b) 455.

7. *pqr, prq, qpr, qrp, rpq, rqp;*
pqs, psq, qps, qsp, spq, sqp;
prs, psr, rps, rsp, spr, srp;
qrs, qsr, rqs, rsq, sqr, srq.
Por consiguiente ${}_4C_3 = 4$.

9. ${}_nC_n = 1$

11. ${}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

13. ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n$

15. ${}_5C_2$; es decir, 10.

17. ${}_{52}C_{13}$; es decir, 635 013 559 600.

19. El orden tiene importancia.

21. ${}_{10}C_4$; es decir, 210; ${}_7C_3 \times {}_3C_1$; es decir, 105.

*23. ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$;

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = {}_nC_r$$

dado que $n - (n - r) = n - n + r = r$.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS RELATIVOS A LA SECCION 8-3

1. ${}_{20}C_2$; es decir, 190.

3. ${}_8C_4$; es decir, 70.

5. ${}_{10}C_2$; es decir, 45.

7. (a) ${}_{52}C_4$; es decir, 270 725.
(b) ${}_{52}C_7$; es decir, 133 784 560.

9. ${}_4P_4$; es decir, 24.

11. $\frac{1}{2} \times {}_8C_4$; es decir, 35.

8-4 DEFINICION DE PROBABILIDAD

1. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{1}{2}$

5. $\frac{5}{6}$

7. 0

9. $\frac{5}{6}$

11. $\frac{1}{2}$

13. $\frac{5}{6}$

15. $\frac{1}{13}$

17. $\frac{1}{4}$

19. $\frac{7}{8}$

8-5 ESPACIOS MUESTRALES

1. $\frac{1}{10}$

3. $\frac{2}{5}$

5. $\frac{3}{5}$

7. $\frac{1}{2}$

9.

Primera moneda	Segunda moneda	Tercera moneda	Cuarta moneda
A	A	A	A
A	A	A	B
A	A	B	A
A	A	B	B
A	B	A	A
A	B	A	B
A	B	B	A
B	A	A	A
B	A	A	B
B	A	A	B
B	A	B	A
B	A	B	B
B	B	A	A
B	B	A	B
B	B	B	A
B	B	B	B

A-Cara B-Cruz

11. $\frac{5}{16}$

13.

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6).

15. $\frac{1}{36}$

17. $\frac{1}{18}$

19. $\frac{1}{6}$

21. $\frac{1}{6}$

23.

R_1R_2, R_2R_1, B_1R_1, B_2R_1,
R_1B_1, R_2B_1, B_1R_2, B_2R_2,
R_1B_2, R_2B_2, B_1B_2, B_2B_1; 1/6.

25.

R_1R_2, R_2R_1, R_3R_1, B_1R_1, B_2R_1,
R_1R_3, R_2R_3, R_3R_2, B_1R_2, B_2R_2,
R_1B_1, R_2B_1, R_3B_1, B_1R_3, B_2R_3,
R_1B_2, R_2B_2, R_3B_2, B_1B_2, B_2B_1; 3/10.

27. Para distinguir los diversos lados, asígnese R_1 y R_2 a los lados de la primer carta; B_1 y B_2 a los lados de la segunda carta y R_3 y B_3 a los lados de la tercera. El espacio muestral para el problema es:

Lado que se ve	*El otro lado*
R_1	R_2
R_2	R_1
R_3	B_3

En dos de los tres casos vemos que si el lado que se ve es rojo, el otro lado también es rojo. Por consiguiente, la probabilidad es 2/3.

8-6 CALCULO DE PROBABILIDADES

1. $\frac{2}{13}$

3. $\frac{4}{13}$

5. $\frac{1}{52}$

7. $\frac{19}{52}$

9. (a) $\frac{1}{16}$
(b) $\frac{1}{2704}$;
(c) $\frac{1}{16}$;
(d) $\frac{1}{676}$;
(e) $\frac{1}{4}$.

11. $\frac{31}{32}$

13. (a) $\frac{7}{10}$;
(b) $\frac{7}{15}$.

15. (a) $\frac{1}{220}$;
(b) $\frac{1}{22}$;
(c) $\frac{7}{44}$;
*(d) $\frac{3}{44}$.

17. (a) $\frac{1}{6}$;
(b) $\frac{1}{36}$;
(c) $\frac{1}{216}$;
(d) $\frac{25}{216}$.

***19.** (a) $\frac{91}{216}$;
(b) $\frac{75}{216}$.

8-7 APUESTAS Y ESPERANZA MATEMATICA

1. 1 a 3.

3. 1 a 3.

5. 3 a 1.

7. 11 a 2.

9. 2 a 7.

11. $4

13. $1.67

15. $2.00

17. La probabilidad de que los dos billetes que se sacan sean de diez es $2/5 \times 1/4 = 1/10$. La probabilidad de que ambos sean de cinco es $3/5 \times 2/4 = 3/10$. La probabilidad de que uno sea de cinco y el otro de diez es $(3/5 \times 2/4) + (2/5 \times 3/4) = 3/5$. La esperanza matemática es pues: $(\$20)(1/10) + (\$10)(3/10) + (\$15)(3/5) = \$14$.

19. $\frac{1}{3}(1) + \frac{1}{6}(5) + \frac{1}{6}(10) + \frac{1}{6}(25) + \frac{1}{6}(50)$; es decir, $15\frac{1}{3}$ centavos.

8-8 TRIANGULO DE PASCAL

1. $\frac{1}{32}$

3. $\frac{5}{16}$

5. $\frac{5}{32}$

7. $\frac{5}{32}$

9. $\frac{13}{16}$

11.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

13. $\binom{12}{0}, \binom{12}{1}, \binom{12}{2}, \binom{12}{3}, \binom{12}{4}, \binom{12}{5}, \binom{12}{6}, \binom{12}{7}, \binom{12}{8}, \binom{12}{9}, \binom{12}{10}, \binom{12}{11}, \binom{12}{12}$.

15. (a) $\frac{11}{32}$;
(b) $\frac{1}{2}$.

17. (a) $\frac{11}{32}$;
(b) $\frac{163}{256}$.

***19.** $1a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + 1b^7$

CAPITULO 9: CONCEPTOS DE LOGICA

9-1 CUANTIFICADORES UNIVERSALES

1. $\forall_x$: x número real.

3. $\forall_t$: t entero.

5. $\forall_x$: x número real.

7. $\forall_x$: x un triángulo.

9. $\forall_x$: x una casa.

11. $\forall_x$: x entero.

13. (a) 9;
(b) 7 o cualquier valor distinto de 9.

15. (a) −6;
(b) 0, o cualquier valor distinto de —6.

17. $\forall_x\forall_y$: $x + 2y = 2x + y$

19. $\forall_x\forall_y\forall_z$: $x + yz = (x + y)z$

21. Verdadera.

23. Falsa: considérese $x = 1$.

25. Falsa: indefinido para $x = 0$.

9-2 CUANTIFICADOR EXISTENCIAL

1. $\exists_x$: x entero no negativo.

3. $\exists_x$: x entero.

5. $\exists_x$: x número real.

7. $\exists_x$: x número real.

9. $\exists_x$: $2x - 5 = 11$

11. $\exists_x$: $x^2 - x - 6 = 0$

13: No todas las manzanas son fruta; es decir, existe al menos una manzana que no es fruta.

15. No todos los números naturales son positivos; es decir, existe al menos un número natural que no es positivo.

17. Todos los números racionales son enteros.

19. Ningún número complejo es número real; es decir, todos los números complejos son no reales.

21. $\exists_x$: $x \neq 2$

23. $\forall_x$: $x^2 > 0$

25. (a) Falsa: considérese $x = 3$ y $x = -3$;
(b) Verdadera;
(c) Falsa: considérese $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$;
(d) Falsa: considérese $x \geq 0$.

9-3 PROPOSICIONES DEPENDIENTES

	VV	VF	FV	FF	Caso
17.	X	✓	✓	✓	9
19.	X	✓	✓	✓	9
21.	✓	✓	X	X	4

23. Todos los pares son dependientes.

25. Las proposiciones en los Ejercicios 17, 18 y 19 son contrarias.

9-4 PROPOSICIONES EQUIVALENTES

1.

p	q	$[\sim(p \wedge q)] \longleftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$					
T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
		(b)	(a)	(f)	(c)	(e)	(d)

3.

p	q	$(p \rightarrow q) \longleftrightarrow [q \vee (\sim p)]$				
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T
		(a)	(e)	(b)	(d)	(c)

5. *Recíproca:* Si compramos un coche nuevo, entonces estamos en condiciones de hacerlo.

Inversa: Si no estamos en condiciones de hacerlo, entonces no compramos coche nuevo.

Contrapositiva: Si no compramos coche nuevo, entonces no estamos en condiciones de hacerlo.

7. *Recíproca:* Si los triángulos son congruentes, entonces dos lados y el ángulo comprendido de uno son congruentes a dos lados y al ángulo comprendido del otro.

Inversa: Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo no son congruentes a dos lados y al ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los triángulos no son congruentes.

Contrapositiva: Si dos triángulos no son congruentes, entonces dos lados y el ángulo comprendido de uno no son congruentes a dos lados y el ángulo comprendido del otro.

9. *Recíproca:* Si $x = 1$, entonces $x(x - 1) = 0$.

Inversa: Si $x(x - 1) \neq 0$, entonces $x \neq 1$.

Contrapositiva: Si $x \neq 1$, entonces $x(x - 1) \neq 0$.

11. La proposición es siempre verdadera en los Ejercicios 7 y 8.

13. La inversa siempre es verdadera en los Ejercicios 7 y 9.

9-5 FORMAS DE PROPOSICIONES

1. Si es un pato, entonces es un pájaro.

3. Si dos ángulos son complementos de un mismo ángulo, entonces son congruentes.

5. Si dos rectas son paralelas, entonces son coplanares.

7. Si una figura geométrica es una circunferencia, entonces es redonda.

9. Si una persona es maestro, entonces es tediosa.

11. Si le gusta este libro, entonces le gustan las matemáticas.

13. Si le gustan las matemáticas, entonces le gusta este libro.

15. Si le gustan las matemáticas, entonces le gustará este libro.

17. $q \rightarrow p$

19. $q \rightarrow p$

21. $p \rightarrow (\sim q)$

23. $p \leftrightarrow q$

25. $p \rightarrow q$

27. $p \leftrightarrow q$

29. Si $9 + 3 < 10$, entonces $11 - 3 > 8$; verdadera.

31. Si $5 + 3 = 8$, entonces $7 \times 4 = 25$; falsa.

33. Si $7 \times 6 = 42$, entonces $8 \times 5 \neq 40$; falsa

35. El planteamiento es equivalente a la proposición: "Si me da $10 000, entonces me casaré con su hija". Si recibe el dinero, entonces tiene que casarse con la muchacha. Por consiguiente se puede entablar juicio contra él por incumplimiento de promesa.

9-6 NATURALEZA DE LA DEMOSTRACION

1. Tautología.

$p \quad p \vee (\sim p)$

p	p	$\vee$	$(\sim p)$
T	T	T	F
F	F	T	T
	(a)	(c)	(b)

3. Tautología.

$p \quad q \quad [(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow (\sim p)$

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(\sim q)$	$\rightarrow$	$(\sim p)$
T	T	T	F	F	T	F
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T
		(a)	(c)	(b)	(e)	(d)

5. No es una tautología.

$p \quad q \quad [(p \rightarrow q) \wedge (\sim p)] \rightarrow (\sim q)$

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(\sim p)$	$\rightarrow$	$(\sim q)$
T	T	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T
		(a)	(c)	(b)	(e)	(d)

7. Tautología.

$p \quad q \quad [(p \vee q) \wedge (\sim p)] \rightarrow q$

p	q	$(p \vee q)$	$\wedge$	$(\sim p)$	$\rightarrow$	q
T	T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	F	T	F
		(a)	(c)	(b)	(e)	(d)

9. Tautología.

$p \quad q \quad r \quad [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow r)$	$\rightarrow$	$(p \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T
			(a)	(c)	(b)	(e)	(d)

9-7 ARGUMENTACIONES VALIDAS

1. Para

p: Pedro es francés.
q: Pedro estudia matemáticas.

la argumentación tiene la forma

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q.$$

Esta proposición es una tautología (§9-6, Ejemplo); la argumentación es válida.

3. Para

p: El equipo gana el juego.
q: El equipo gana el campeonato.

la argumentación tiene la forma

$$[(p \to q) \wedge (\sim q)] \to (\sim p).$$

Esta proposición es una tautología (§9-6, Ejercicio 3); la argumentación es válida.

5. Para

p: Trabaja con empeño.
q: Las cosas le salen bien.

el razonamiento tiene la forma

$$[(p \to q) \wedge (\sim q)] \to (\sim p).$$

Esta proposición es una tautología (§9-6, Ejercicio 3); la argumentación es válida.

7. Para

p: Está leyendo este libro.
q: Le gustan las matemáticas.

la argumentación tiene la forma

$$[(p \to q) \wedge (\sim p)] \to (\sim q).$$

Esta proposición no es una tautología (§9-6, Ejercicio 5); la argumentación no es válida.

9. La argumentación es de la forma $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (r \to p)$ y no es válida.

11. No toma leche.

13. Si le gusta pescar, entonces es matemático.

15. Si le gusta este libro, entonces será matemático.

9-8 DIAGRAMAS DE EULER

1. Válido.

3. No válido.

5. (a) válido;
(b) válido;
(c) válido;
(d) no válido.

7. (a) válido;
(b) válido;
(c) no válido;
(d) no válido;
(e) no válido;
(f) no válido;
(g) no válido.

9. (a) válido;
(b) válido;
(c) válido;
(d) no válido.

CAPITULO 10: CONCEPTOS DE GEOMETRIA

10-1 LA EVOLUCION DE LA GEOMETRIA

1. El área de toda la figura es igual a la suma de las áreas de sus partes. Los griegos identificaban el área $(x + 1)^2$ del cuadrado de lado $x \times 1$ como el cuadrado sobre $(x + 1)$ identificaban así mismo el área $x \times 1$ del rectángulo de lados x y 1 con la parte de superficie comprendida entre los lados. Entonces el cuadrado sobre $(x + 1)$ es igual a la suma de los cuadrados sobre x y sobre 1 junto con el doble del rectángulo de lados x y 1.

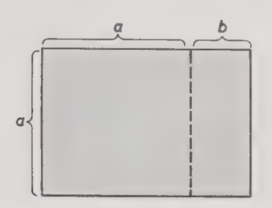
3. Como en el Ejercicio 1 el cuadrado de $(a - b)$ junto con el doble del rectángulo de lados a y b es igual a la suma de los cuadrados de a y de b; es decir,

$$(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

y por consiguiente

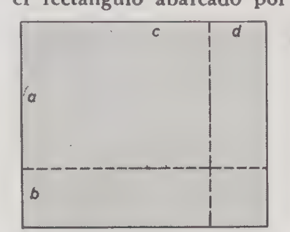
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

5. Como en el Ejercicio 1 el rectángulo abarcado por $(a + b)$ y a es igual a la suma del cuadrado sobre a y el rectángulo abarcado por a y b.



7. Como en el Ejercicio 1, el rectángulo de lados $(a + b)$ y $(c + d)$ es igual a la suma de:

el rectángulo abarcado por a y c,
el rectángulo abarcado por a y d,
el rectángulo abarcado por b y c,
el rectángulo abarcado por b y d.



10-2 GEOMETRIA EUCLIDEA

1. No, en la definición no se menciona ninguna clase que comprenda al concepto "punto" y además, la definición no es reversible.

3. No, la definición no es reversible.

5. No; para la mayor parte de la gente, un polígono cualquiera no es una figura más sencilla que un triángulo.

7. (a) sí;
(b) sí;
(c) sí;
(d) no;
(e) no.

9. (b), (c).

11. (a) sí;
(b) sí;
(c) sí;
(d) no;
(e) no.

13. (b), (c).

15. Considerando, por definición, que una recta no es paralela a sí misma, se tiene:

Para el Ejercicio 7:
(a) sí;
(b) no;
(c) sí;
(d) no;
(e) No.
Para el Ejercicio 9: (c).

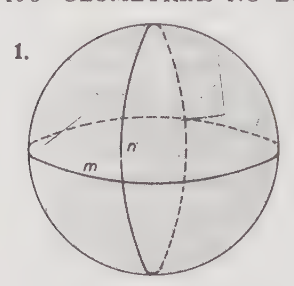
17. Considerando, por definición, que una recta contenida en un plano no es paralela al plano, se tiene:

Para el Ejercicio 11:
(a) sí;
(b) no;
(c) sí;
(d) no;
(e) sí.

Para el Ejercicio 13: ninguna.

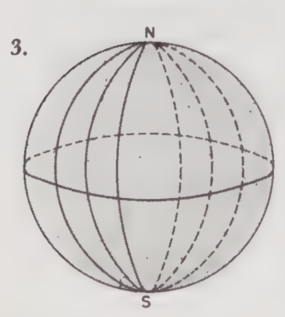
10-3 GEOMETRIAS NO EUCLIDEANAS

1.



	Euclidea	Elíptica	Hiperbólica	Esférica
5.	Sí	Sí	Sí	No
7.	Sí	——	No	——
9.	Sí	No	No	No
11.	Sí	No	Sí	No

3.

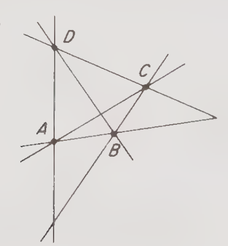


10-4 GEOMETRIA PROYECTIVA

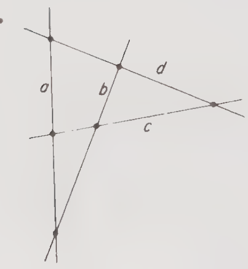
1. Dos puntos cualesquiera distintos sobre el mismo plano determinan una recta única.

3. Dos rectas cualesquiera distintas sobre el mismo plano determinan un punto único.

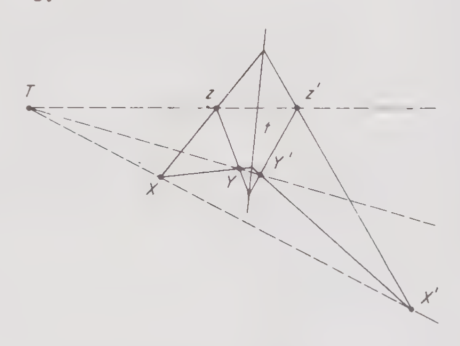
5.



7.



9.



11. Véase la figura inmediata que precede a estos ejercicios.

10-5 UNA GEOMETRIA FINITA

1. Potulado I.

3. Postulado III.

5. Postulado VI.

7. Postulado II.

9. Postulado V.

11. Postulado II.

13. Postulado V.

15. Postulado V.

17. Postulado V.

19. Postulado IV.

21. Postulado V.

23. Postulados III y VII y Ejercicios 21 y 22.

25. Postulado VII.

27. Postulado V.

29. Postulado IV.

31. Postulado V.

33. Postulados III y VII y Ejercicios 31 y 32.

35. Postulado VII.

37. Postulado V.

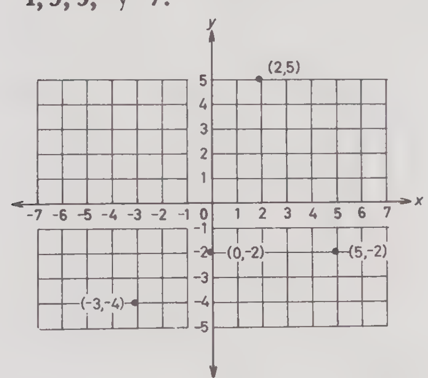
39. Postulado III y Ejercicios 36, 37 y 38.

41. Ejercicios 34 y 40.

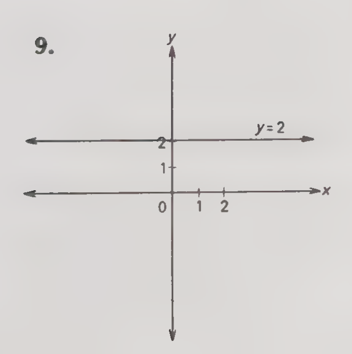
43. Ejercicios del 1 al 41.

10-6 GEOMETRIA ANALITICA

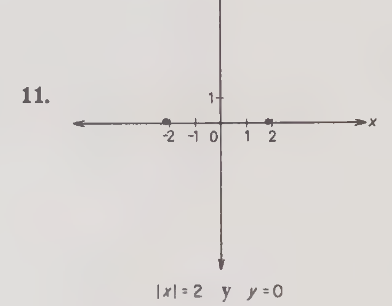
1, 3, 5, y 7.



9.

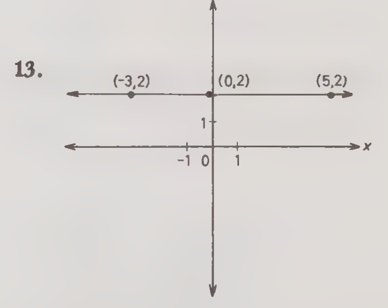


11.



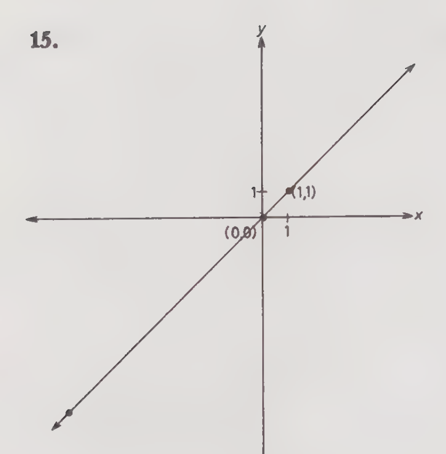
$|x| = 2$ y $y = 0$

13.

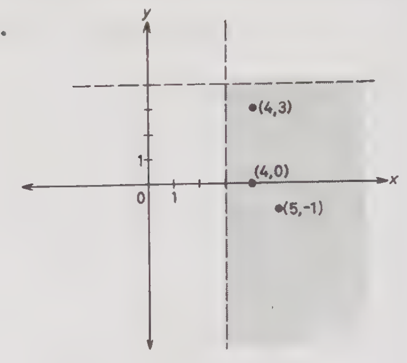


En los Ejercicios del 13 al 21, existen muchas formas correctás de seleccionar puntos que satisfagan las condiciones.

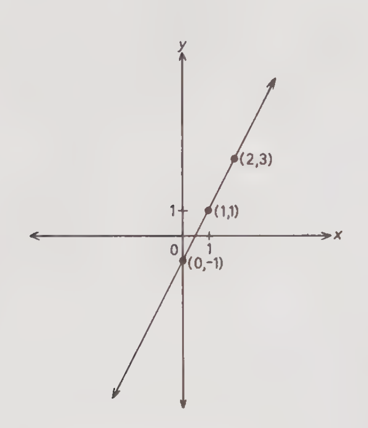
15.



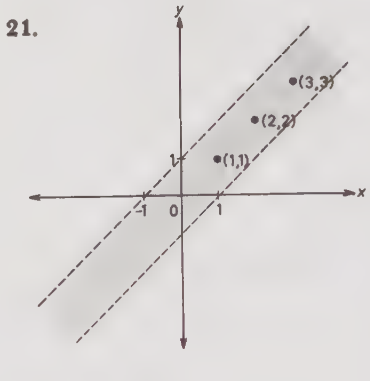
19.



17.



21.



23. $x = -3$; 5.

25. $y = 2$; 4.

27. $y = -3$; 6.

10-7 FORMULA DEL PUNTO MEDIO

1. (2, 5)

3. (−1, 1)

5. (a) Triángulo rectángulo.
(b) Triángulo isósceles.
(c) Triángulo rectángulo.
(d) Triángulo isósceles.
(e) Triángulo isósceles.

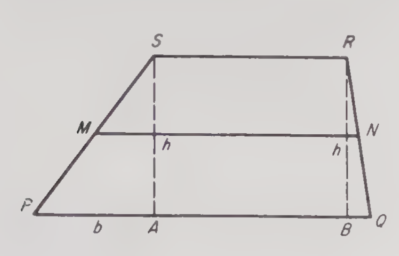
7. (3, 11)

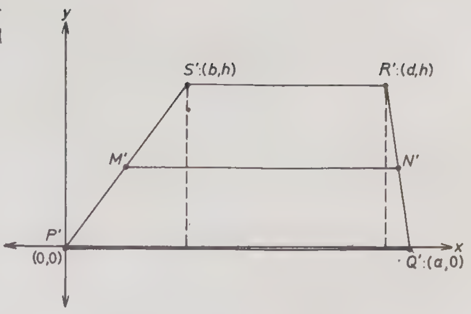
9. $(0, k)$ y $(5, k)$ para todo $k \neq 0$.

11. (a) (2, 2) y (0, 2);
(b) (2, −2) y (0, −2);
(c) (1, 1) y (1, −1).

13. (a) $(2a, 2a)$ y $(0, 2a)$;
(b) $(2a, -2a)$ y $(0, -2a)$;
(c) (a, a) y $(a, -a)$.

15. Un cuadrilátero $PQRS$ es un trapecio si $PQ||RS$. Podemos representar el





trapecio sobre un plano coordenado con $P'Q'$ sobre el eje x, P' en $(0, 0)$ Q' en $(a, 0)$, siendo $m\ (\overline{PQ}) = a$ y R' con ordenada positiva. Dado que $SR||PQ$, las alturas $\overline{SA}$ y $\overline{RB}$ sobre PQ son iguales; supongamos $m\,(\overline{SA}) = h$. Entonces S' y R' tienen ordenada h; pueden tener números distintos cualesquiera b y d, respectivamente, como abscisa, siendo $b < d$ para una figura convexa. Tomamos S' en (b, h) y R' en (d, h). Cualquier trapecio $PQRS$ puede representarse en un plano coordenado de dicha forma con vértices en $(0, 0)$, $(a, 0)$, (d, h) y (b, h) para valores adecuados para a, b, d y h. Sean M' el punto medio de $\overline{P'S'}$ y N' el punto medio de $\overline{R'Q'}$. Se tiene entonces

$$M'\text{:}\ \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) \quad \text{and} \quad N'\text{:}\ \left(\frac{a+d}{2}, \frac{h}{2}\right).$$

La recta $M'N'$ es paralela al eje x y, por consiguiente, a $\overleftrightarrow{P'Q'}$, dado que las ordenadas de M' y N' son iguales. La longitud de $\overline{M'N'}$ es $\left|\frac{a+d}{2} - \frac{b}{2}\right|$; es decir, $1/2[a + (d - b)]$. La longitud de $\overline{P'Q'}$ es a, la longitud de $\overline{S'R'}$ es $(d - b)$. Por lo tanto, la longitud de $\overline{M'N'}$ es la semi suma de las bases del trapecio.

17. Cualquier cuadrilátero dado $PQRS$ puede representarse sobre un plano coordenado por $P'Q'R'S'$, como se ha visto en el Ejercicio 11, con coordenadas P' $(0, 0)$, Q' $(a, 0)$, R' (b, c) y S' (d, e). Los lados $\overline{P'Q'}$ y $\overline{R'S'}$ son lados opuestos y tienen por puntos medios $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{b+d}{2}, \frac{c+e}{2}\right)$, respectivamente. El segmento de recta que une dichos puntos medios tiene a su vez por punto medio $\left(\frac{a+b+d}{4}, \frac{c+e}{4}\right)$. Análogamente, los lados $\overline{P'S'}$ y $\overline{Q'R'}$ son lados opuestos y tienen por puntos medios $\left(\frac{d}{2}, \frac{e}{2}\right)$ y $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, respectivamente. El segmento de recta que une dichos puntos medios tiene a su vez por punto medio $\left(\frac{a+b+d}{4}, \frac{c+e}{4}\right)$. Dado que los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero tienen el mismo punto medio, se cortan a la mitad.

10-8 PENDIENTE DE UNA RECTA

1. (a) $\frac{1}{2}$;
(b) 2;
(c) $\frac{4}{3}$;
(d) $-\frac{2}{3}$.

3. (a) $y = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$;
(b) $y = 2x - 7$;
(c) $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$;
(d) $y = -\frac{2}{3}x + 7$.

5. (a) -7;
   (b) $3\frac{1}{2}$;
   (c) $\frac{1}{4}$;
   (d) $10\frac{1}{2}$.

7. $y + 11 = -3(x - 7)$

9. $y + 2 = \frac{3}{2}x$

11. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$

13. $y = 2x$

15. *Datos:* Las rectas a, b, c tales que $a||b$ y $c||b$.
Lo que hay que demostrar: $a||c$.

Demostración: La recta b se toma tal que no sea paralela al eje y y tenga pendiente m. Entonces la recta a tiene pendiente m, dado que $a||b$; además, la recta c tiene pendiente m, dado que $c||b$. Finalmente, $a||c$, dado que ambas tienen pendiente m.

17. *Datos:* Las rectas a, b y c tales que $a||b$ y b corta a c.
Lo que hay que demostrar: a corta a c.

Demostración: Como en el Ejercicio 16, sea m la pendiente de la recta b; la pendiente de la recta a es también m; la pendiente de c no es igual a m; a y c tienen diferentes pendientes y por consiguiente se cortan.

19. AB y CD tienen pendiente $7/5$; AD y BC tienen pendiente 3; $AB||CD$ y $AD||BC$; por consiguiente, por definición, $ABCD$ es un paralelogramo.

10-9 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

1. 3

3. 5

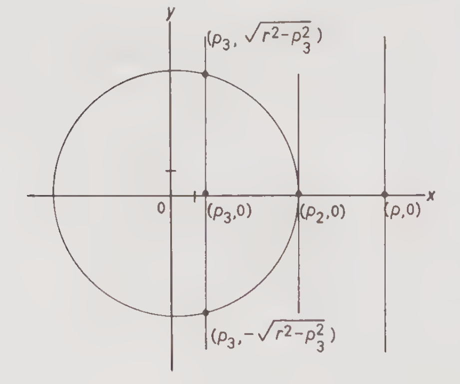
5. $\sqrt{73}$

7. 10

9. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

11. $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$;
   (a) Sí;
   (b) No;
   (c) Sí.

13. *Datos:* La circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, $x = p_1$ siendo $p_1 > r$, $x = p_2$ siendo $p_2 = r$, $x = p_3$ siendo $p_3 < r$.

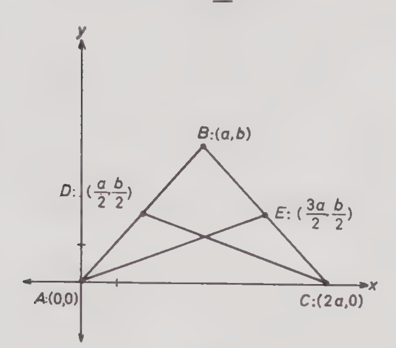


A demostrar: La recta $x = p_1$ no corta a la circunferencia; la recta $x = p_2$ es tangente a la circunferencia; la recta $x = p_3$ es secante de la circunferencia.

Demostración: Resolviendo la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ de la circunferencia simultáneamente con la ecuación $x = p_1$ de la recta, $p_1^2 + y^2 = r^2$, es decir, $y^2 = r^2 - p_1^2$. Pero $p_1^2 > r^2$; por consiguiente, $(r^2 - p_1^2)$ es negativo y y es imaginario; en otras palabras, la recta no corta a la circunferencia. Utilizando la recta $x = p_2$, $y^2 = r^2 - p_2^2$. Pero $r^2 = p_2^2$ dado que $r = p_2$; por consiguiente, $y = 0$ y el único punto en común de $x^2 + y^2 = r^2$ y $x = p_2$ es el punto $(p_2, 0)$; por consiguiente, $x = p_2$ es tangente a la circunferencia. Utilizando la recta $x = p_3$, $y^2 = r^2 - p_3^2$. Pero $r^2 > p_3^2$ dado que $r > p_3$; por lo tanto, $(r^2 - p_3^2)$ es positivo y y tiene dos raíces reales distintas. Por consiguiente, $x = p_3$ corta a $x^2 + y^2 = r^2$ en $(p_3, \sqrt{r^2 - p_3^2})$ y $(p_3, -\sqrt{r^2 - p_3^2})$, siendo $x = p_3$ una secante de la circunferencia.

15. *Dado:* El triángulo isósceles ABC, $\overline{AB} \simeq \overline{BC}$ de medianas $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$, cuyos vértices tienen por coordenadas A: (0, 0) ; B: (a, b) y C: $(2a, 0)$.

Demostrar: $\overline{AE} \cong \overline{CD}$.



Demostración: Por la fórmula del punto medio se tiene E: $\left(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ y D: $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos,

$$m(\overline{AE}) = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{9a^2 + b^2}}{2}$$

y

$$m(\overline{CD}) = \sqrt{\left(2a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{9a^2 + b^2}}{2};$$

por consiguiente

$$\overline{AE} \cong \overline{CD},$$

dado que ambas tienen por medida

$$\frac{\sqrt{9a^2 + b^2}}{2}.$$

***17.** **(a)**

$\sqrt{(1 - 1)^2 + (4 - 0)^2 + (5 - 2)^2}$; que es decir, 5;

(b)

$\sqrt{(1 - 2)^2 + (5 - 7)^2 + [0 - (-3)]^2}$; es decir, $\sqrt{14}$.

***19.** **(a)** $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 4$;

(b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 25$.

10-10 LINEAS PERPENDICULARES

1. $-\frac{1}{2}$

3. $-\frac{5}{2}$

5. $y = -\frac{1}{3}x$

7. $y + 3 = -2x$

9. $y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 1)$

11. $y - 4 = x - 2$

13. *Dado:* $a||b$, $r \perp a$, siendo m la pendiente de a.

Demostrar: que $r \perp b$.

Demostración: La pendiente de b es m dado que $a||b$ y las rectas paralelas tienen la misma pendiente. La pendiente de r es $-\frac{1}{m}$, dado que al ser $r \perp a$ las pendientes de r y a deben ser negativamente recíprocas. Las pendientes de b y r son pues también negativamente recíprocas; por consiguiente, $r \perp b$, dado que dos rectas cuyas pendientes son negativamente recíprocas son perpendiculares.

15. *Datos:* a y b, rectas que se cortan con pendientes m y n respectivamente, $r \perp a$ y $s \perp b$.

Demostrar que: r y s se cortan.

Demostración: Las pendientes m y n no son iguales dado que las rectas a y b se cortan. Por lo tanto,

$$\frac{1}{m} \neq \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{m} \neq -\frac{1}{n}.$$

La pendiente de r es $-\frac{1}{m}$; la pendiente de s es $-\frac{1}{n}$; r y s se cortan.

*17. *Datos:* ΔABC con alturas $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$, vértices en A: $(0, 0)$, B: $(b, 0)$ y C: (a, c).

Demostrar: $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ son concurrentes.

Demostración: Dado que $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}||$al eje y y la ecuación de $\overleftrightarrow{CD}$ es $x = a$. La pendiente de $\overleftrightarrow{AC}$ es $\frac{c}{a}$ y la pendiente de $\overleftrightarrow{BD}$, la altura correspondiente a $\overleftrightarrow{AC}$, es $-\frac{a}{c}$; de igual modo, la pendiente de $\overleftrightarrow{BC}$ es $\frac{c}{a-b}$ y la pendiente de $\overleftrightarrow{AE}$, la altura correspondiente a $\overleftrightarrow{BC}$, es $-\frac{a-b}{c}$ o $\frac{b-a}{c}$, dado que una altura es perpendicular al lado sobre la que se traza, y las pendientes de rectas perpendiculares son negativamente recíprocas. Por la fórmula punto-pendiente, la ecuación de $\overleftrightarrow{AE}$ es $y = \frac{b-a}{c}x$ y la ecuación de $\overleftrightarrow{BF}$ es $y = -\frac{a}{c}(x - b)$. Resolviendo simultáneamente estas dos ecuaciones, tenemos

$$\frac{b-a}{c}x = -\frac{a}{c}(x-b);$$

es decir, $x = a$ y $y = \frac{ab - a^2}{c}$. Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de $\overleftrightarrow{AE}$ y $\overleftrightarrow{BF}$ son $\left(a, \frac{ab-a^2}{c}\right)$, el cual es también punto de la recta $x = a$; por consiguiente, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ son concurrentes.

INDICE

C

D

E

F

G

H

I

R

Se terminó de imprimir en Septiembre de 2008
En los talleres de Programas Educativos, S.A. de C.V.
Calz. Chabacano No. 65, Local A
Col. Asturias, C.P. 06850, México, D.F.
Empresa Certificada por el
Instituto Mexicano de Normalización
y Certificación A.C., bajo la Norma
ISO-9002: 1994/NMX-CC-004: 1995
con el No. de Registro RSC-048
e ISO-14001: 1996/NMX-SAA-001: 1998 IMNC
con el No. de Registro RSAA-003

Publicaciones científicas y de Tecnología aplicada de Editorial Reverté, S. A.

ELEMENTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

por

Elmer B. Mode

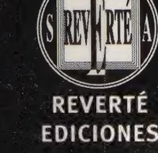
Profesor de Matemáticas
de la Universidad de Boston

Un volumen de 367 páginas. Formato 22 × 16 cm.

En años recientes, ha ido en aumento el deseo de enseñar probabilidad y estadística en un solo curso: primero, porque la probabilidad por sí misma ha llegado a ser una herramienta necesaria en muchos campos de la actividad intelectual y, segundo, porque constituye la piedra angular sobre la que descansa la vasta estructura de la estadística moderna. El objetivo principal de este libro es desarrollar los conceptos básicos y las reglas de la probabilidad matemática y mostrar cómo esto nos proporciona modelos para la solución de problemas prácticos, especialmente para los de naturaleza estadística.

Este texto no se inclina por ninguna área de aplicación en particular. Los ejemplos y ejercicios han sido seleccionados de muchos campos, tales como la biología, la educación, la economía, la genética, la psicología y la sociología. Como prerrequisito matemático, se requiere el conocimiento de la cantidad usual de matemáticas que se imparten en cursos profesionales, alrededor de dos años de álgebra, como mínimo. Sin embargo, en la sección 9.6 se consideró conveniente incluir una definición formal del integral definido, pero esta parte puede omitirse, a discreción del instructor. El capítulo referente a las cadenas de Markov está asociado más bien con los capítulos 2 a 5 relativos a probabilidad, pero se consideró prudente colocarlo al final del libro, ya que muchos cursos no disponen del tiempo necesario para incluirlo.

EXTRACTO DEL ÍNDICE



ISBN: 968-6708-53-7
9 789686 708530